

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ГЕОФИЗИЧЕСКИЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
(ГЦ РАН)

На правах рукописи

ШАТАХЦЯН Артем Рубенович

**СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И КЛАСТЕРИЗАЦИЯ РУДНЫХ
МЕСТОРОЖДЕНИЙ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕР БЛИЗОСТИ
И ФРАКТАЛЬНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ**

25.00.10 – Геофизика, геофизические методы поисков полезных ископаемых

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Родкин Михаил Владимирович

Москва – 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
Глава 1. Распределение числа месторождений по объему запасов и величинам концентрации рудных компонент	12
1.1 Общая характеристика процессов образования месторождений	12
1.1.1 Описание процессов методами физической химии.....	12
1.1.2 Типовые распределения в динамических системах	18
1.2 Данные и анализ данных.....	21
1.3 Модели генерации распределений величин объемов запасов и концентрации рудных компонент.....	29
1.3.1 Условия формирования логнормального и степенного распределений.....	29
1.4 Выводы к главе 1	30
Глава 2. Фрактальная размерность распределения месторождений по земному шару.....	32
2.1 Дробная размерность	32
2.1.1 Размерность Минковского	32
2.1.2 Размерность Хаусдорфа-Безиковича	33
2.1.3 Вычисление размерности Минковского с помощью ЭВМ.....	34
2.1.4 Мультифракталы и обобщенные размерности Реньи d_q	38
2.1.5 Фрактальная размерность D_0	39
2.1.6 Информационная размерность D_1	39
2.1.7 Корреляционная размерность D_2	40
2.2 Опыт применения фрактальной размерности в геофизике	41
2.2.1 Моделирование распределений месторождений.....	43
2.3 Фрактальная размерность распределения рудных месторождений	52
2.3.1 Корреляционная размерность D_2	52
2.3.2 Смешанная корреляционная размерность.....	55
2.3.3 Использование специализированных баз данных	61
2.3.4 Кластеризация на основе смешанной корреляционной размерности.....	63
2.4 Выводы к главе 2	65
Глава 3. Кластеризация рудных месторождений	67
3.1 Кластеризация рудных месторождений	67
3.1.1 Этапы кластеризации.....	67
3.1.2 Мера Танимото-Роджерса.....	69

3.1.3 Применение меры Танимото-Роджерса.....	71
3.1.4 Алгоритм Краскала.....	74
3.2 Дендрограмма рудных компонент.....	76
3.2.1 Выявленные зависимости, обсуждение.....	81
3.2.2 Возможные графические представления дендрограммы.....	84
3.3 Классификация компонент рудных месторождений.....	86
3.4 Выводы к главе 3.....	88
Глава 4. Согласованность оценок мер близости групп рудных месторождений по результатам применения метода расчета смешанной корреляционной размерности и расчетов на основе меры близости Танимото-Роджерса.	90
4.1 Согласованность двух методов.....	90
4.1.1 Фрактальная размерность и мера Танимото-Роджерса.....	90
4.1.2 Кластеризация на основе обобщенного расстояния.....	92
4.2 Геологическая интерпретация результатов.....	96
4.2.1 Моделирование механизма формирования месторождений - некоторые предварительные общие схемы.....	96
4.2.2 Обсуждение результатов кластеризации.....	102
4.3 Выводы к главе 4.....	103
Заключение.....	105
Список литературы.....	107

ВВЕДЕНИЕ

Развитие современной научной мысли во многом обязано процессам интеграции смежных, а порой и относительно далеких областей знания. Действительно, возможность рассмотреть задачу с новой стороны, порой, если и не приводит к ее моментальному решению, то, по крайней мере, формулирует ее в новых терминах и предлагает новые инструменты для ее исследования.

Наличие некоего аналога закона Гутенберга-Рихтера, играющего ключевую роль в сейсмологии, для распределения месторождений может пролить свет на механизмы образования месторождений. В случае землетрясений, анализу подвергались пространственные распределения очагов и распределения величин сейсмического момента и магнитуды, как характеристики величины землетрясения. Аналогичные методы могут быть применены (но ранее обычно не применялись) для анализа рудных месторождений.

Современные базы данных по месторождениям содержат информацию об их пространственном расположении, объемах и концентрациях ископаемого компонента. Эти данные могут быть использованы для анализа пространственного распределения самих месторождений и распределения концентраций и объемов полезных компонент. Несколько более изученными в этом смысле являются углеводородные (УВ) - месторождения: существует обоснованная точка зрения, что залежь УВ – открытая, неравновесная природная система, контактирующая с двумя резервуарами: источником энергии и вещества (нефтегазоматеринская толща) и термостатом (гидро- и атмосфера), в который диссипируют из нее вещество и энергия [Афанасьев, 1999; Соколов, 2001]. По этой причине, изучение нефтегазоносных толщ в настоящее время проводится с привлечением формальных математических методов, которые используются при описании синергетических процессов. К числу таких подходов относится вычисление фрактальной размерности, исследование распределений численных параметров. Распределение по объемам запасов месторождений для УВ-месторождений иногда используется для прогноза числа неоткрытых месторождений в выбранном регионе [Конторович, 1979, 1985; Бурштейн, 2006]. Величина фрактальной размерности играет важную роль при построении моделей переноса нефти и газа в горных породах. Исследования ведутся в обоих направлениях: как теоретическом (построение

моделей) так и в практическом (определение реальной фрактальной размерности). Значения измеряемой фрактальной размерности порового пространства горных пород находится в диапазоне от 2.6 до 2.8 [Агаронов, 1996б; Иванов, 2002]. К теоретическим исследованиям можно отнести модели переноса во фрактальных кластерах с определенной размерностью [Запивалов, 2000], попытка систематизации и обзора моделей фильтрационно-емкостных характеристик в пористых материалах, имеющих внутреннюю фрактальную структуру дана в [Yu, 2008].

Для рудных месторождений на данный момент многие аналогичные вопросы менее разработаны. Многие оценки даются на основе экспертных суждений и на основе некоторых выбранных регионов, а не по более полным мировым данным. В некоторых работах предполагается особенность крупных и суперкрупных рудных месторождений [База данных..., 2006] из-за их нелинейного расположения на ранговом графике. Похожая точка зрения только для УВ-месторождений высказывается и в работах опытного геолога-практика и прекрасного знатока истории крупных открытий нефти и газа, по [Перродон, 1994]: «общепризнано, что самые крупные месторождения УВ подчиняются иным правилам, нежели обычные». Отметим, что при этом есть и альтернативные мнения по этому вопросу. В данной работе данные по рудным месторождениям исследуются с применением методов, ранее применявшихся при исследовании сейсмичности и УВ месторождений.

Актуальность исследований

Исследование многих природных процессов, в геофизике в первую очередь сейсмического процесса, показало широкое распространение в природе степенных законов распределения и фрактальности пространственной и временной структуры большого числа природных процессов и систем. Для исследования таких систем нашли применение и были специально разработаны методы фрактального анализа и иные подходы, которые показали свою эффективность при анализе сейсмического режима, структуры разломной сети, УВ месторождений и многих других природных геофизических объектов и явлений. Наблюдается тенденция расширения сферы применения этих новых подходов на все новые – предположительно сложные и существенно неравновесные – природные объекты и явления. В то же время в ряде областей геофизики и геологии применение таких новых подходов не имеет место или недостаточно развито. При этом развитие систем баз данных часто уже дает возможность реализовать такое применение. К таким весьма практически важным областям относится область исследования рудных месторождений. Применительно к процессам

формирования месторождений по-прежнему остаются неясными многие вопросы рудогенеза и, в частности, принципиально важный вопрос – каков источник энергии и характер тех мощных негэнтропийных процессов, что приводят к массивированной и чрезвычайно высокой (относительно фонового содержания) концентрации рудного вещества в месторождениях. Применение методов исследований, нацеленных на анализ существенно неравновесных динамических систем, позволяет продвинуться в понимании таких вопросов. Отсюда следует актуальность проведенного исследования.

Следует отметить также, что расширение применения методов на новую проблемную область зачастую приводит к необходимости развития также формально-математического аппарата и методов исследования. Именно такой случай имеет место и в настоящем исследовании. При исследовании статистических закономерностей взаимного расположения рудных месторождений разного типа оказалось продуктивным ввести и широко использовать понятие смешанной фрактальной размерности. Отсюда следует определенная актуальность настоящего исследования также и в методологическом отношении.

Основные цели настоящего исследования:

- Получение опыта применения формально-математических методов (статистический и фрактальный анализ, кластеризация и другие) к анализу данных по рудным месторождениям. Развитие этих подходов, учитывая специфический характер этой проблемной области.

- Исследование законов распределения, типичных для данных по рудным месторождениям (по данным географической информационной системы «Крупные и Суперкрупные Месторождения» (ГИС КСКМ) и других источников), кластеризация типов рудных месторождений на основе использования мер близости и фрактального анализа.

Для достижения цели работы решались следующие задачи исследования:

1. Компиляция базы данных на основе ГИС КСКМ и других источников, пополнение базы более детальными данными по месторождениям меди.

2. Статистический анализ сформированной сводной БД в виде матрицы значений исследуемых параметров на основе данных ГИС КСКМ и других источников, исследование возможных аппроксимаций эмпирических распределений величин запасов и концентраций крупных и суперкрупных рудных месторождений; подтверждение ранее высказанной (на основе существенно менее представительных массивов данных) гипотезы о возможности

описания эмпирических распределений величин запасов – степенным, а значений концентрации – логнормальным законами распределения.

3. Развитие методов фрактального корреляционного анализа применительно к исследованию рудных месторождений; введение нового понятия – смешанной корреляционной размерности.

4. Апробирование возможности применения для кластеризации рудных месторождений подхода, основанного на применении меры близости Танимото-Роджерса и смешанной корреляционной размерности.

5. Оценка согласованности результатов расчетов степени близости разных видов месторождений на основе применения смешанной корреляционной фрактальной размерности и меры близости Танимото-Роджерса

6. Разработка обеспечивающих реализацию выявленных статистических закономерностей общих формально-математических моделей формирования рудных месторождений и некоторых возможных, отвечающих им геологических моделей формирования месторождений.

Фактический материал и методика исследований

Информационную основу (фактический материал) исследований составляли мировые базы данных по рудным месторождениям: ГИС КСКМ, по седиментационным, магматическим и порфировым медным месторождениям. Извлечение данных из ГИС КСКМ и пополнение базы данных проводилось с помощью стандартных программ обработки данных, обработка сформированной базы данных (БД) проводилась средствами пакета MatLab.

Методика исследования заключалась в применении методов динамического (фрактального) анализа ранее разработанных применительно к сейсмологии и ряда других статистических подходов для исследования данных по крупным и суперкрупным рудным месторождениям.

Научная новизна работы и практическая значимость состоит в применении методов статистического, кластерного и фрактального анализа к массивам данных по крупным рудным месторождениям (ряд использованных подходов ранее не применялся или применялся только в других областях знаний) и в построении генерализованных моделей формирования месторождений, обеспечивающих выполнение выявленных статистических закономерностей.

Практическая значимость заключается в выявлении ряда неизвестных ранее статистических закономерностей в характере данных по расположению, набору полезных элементов, объемам запасов и концентраций руд в крупных и суперкрупных месторождениях.

Личный вклад автора

В ходе работы автор проделал основной объем работ по подготовке, дополнению и верификации используемой в диссертации базы данных, принимал непосредственное участие в обсуждении большинства использованных методов анализа данных и в реализации всех использованных методов анализа, а также в подготовке к публикации совместных статей. Автор является основным разработчиком приемов визуального представления данных по изменению фрактальной размерности с изменением масштаба расстояний между объектами. Непосредственно автором получены и обработаны более детальные данные по совокупности мировых порфириковых, магматических и седиментационных месторождений меди, также им персонально разработаны некоторые методические вопросы по реализации кластеризации данных и по представлению фрактальных размерностей.

Защищаемые положения являются обобщением основных результатов работы и состоят в следующем:

1. Подтверждено, что данные по величинам запасов и значениям концентрации крупных рудных месторождений мира могут быть описаны степенным и логнормальным законами соответственно.
2. Показана применимость и эффективность методов анализа поведения динамических систем для анализа данных по рудным месторождениям. Для анализа данных по месторождениям аппарат фрактального анализа дополнен введением понятия смешанной корреляционной фрактальной размерности и ее интерпретацией в терминах меры близости.
3. Показана применимость и эффективность формального аппарата кластеризации на основе меры близости Танимото-Роджерса и смешанной корреляционной размерности к данным по рудным месторождениям, согласованность и информативность применения этих разных методов кластеризации.

Достоверность и обоснованность научных положений, выводов и рекомендаций обеспечивается корректным использованием методов математического моделирования, теории вероятности и математической статистики, апробированными фактическими данными географической информационной системы «Крупные и Суперкрупные Месторождения» и других использованных источников, достаточным объемом таких данных, согласованностью полученных результатов с результатами, полученными ранее другими авторами и другими методами.

Теоретическое и практическое значение

Развиты новые подходы для описания данных по крупным и суперкрупным рудным месторождениям и выявлен ряд неизвестных ранее статистических закономерностей в характере данных по расположению, набору полезных элементов, объемам запасов и концентраций руд в крупных и суперкрупных месторождениях мира.

Получены новые свидетельства, что формирование рудных месторождений является результатом действия геодинамических неравновесных систем.

В уточнение и дополнение к ранее предложенным экспертным качественным моделям кластеризации рудных месторождений предложены два согласующихся формально-математических метода кластеризации.

Апробация работы

Основные результаты, полученные в ходе настоящей работы, были представлены на пятнадцати всероссийских, международных научных конференциях и совещаниях:

Международной конференции «Итоги электронного геофизического года» (Переславль-Залеский, 2009); Всероссийской конференции «Новые горизонты в изучении процессов магмо- и рудообразования» (Москва, 2010); XLIII Тектоническом совещании «Тектоника и геодинамика складчатых поясов и платформ фанерозоя» (Москва, 2010); XVI Международной конференции «Свойства, структура, динамика и минерагения литосферы Восточно-Европейской платформы» (Воронеж, 2010); Interdisciplinary Workshop «The earth expansion evidence – A Challenge for Geology, Geophysics and Astronomy» (Erice, Sicily, Italy, 2011); Третьей научно-практической конференции молодых ученых и специалистов «Комплексное изучение и оценка месторождений твердых полезных ископаемых» (Москва, 2011); Всероссийской научной конференции «Тектоника, рудные месторождения и глубинное строение Земной коры» (Екатеринбург, 2011); 11-м Всероссийском семинаре «Геодинамика,

геомеханика и геофизика» (п. Новый Энхалук, Республика Бурятия, 2011); Всероссийской научной конференции с международным участием «Геодинамические процессы и природные катастрофы в Дальневосточном регионе» (Южно-Сахалинск, 2011); Всероссийской научной конференции с международным участием «Геодинамика, рудные месторождения и глубинное строение литосферы» (Екатеринбург, 2012); 28-й Международной конференции «Геологическая среда, минерагенические и сеймотектонические процессы» (Воронеж, 2012); Всероссийской конференции «Тектоника, глубинное строение и минерагения Востока Азии» (Хабаровск, 2013); Четырнадцатой международной конференции «Физико-химические и петрофизические исследования в науках о Земле» (Борок, 2013); XLVI Тектоническом совещании «Тектоника складчатых поясов Евразии» (Москва, 2014); XLIX Тектоническом совещании «Тектоника современных и древних океанов и их окраин» (Москва, 2017).

Результаты работ подробно докладывались автором на специализированных семинарах Геофизического центра Российской академии наук, Института теории прогноза землетрясений Российской академии наук, Геологического музея Российской академии наук и геологического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Публикации

В общей сложности по теме диссертационной работы подготовлена 21 публикация, из них 4 – в российских и зарубежных научных изданиях, входящих в перечень ВАК РФ для публикации основных результатов кандидатских диссертаций, 17 – статьи в сборниках по материалам конференций и тезисы конференций, других изданиях.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 88 наименований. Работа содержит 114 страниц машинописного текста, 42 рисунка и 9 таблиц.

Благодарности

Автор благодарен сотрудникам ГЦ РАН где проводилась работа по подготовке диссертации. В особенности автор признателен своему руководителю – д.ф.-м.н. М.В. Родкину за руководство в работе, директору ГЦ РАН академику А.Д. Гвишиани за указание общего направления исследований по применению методов искусственного интеллекта и кластеризации к новым областям геофизики и геологии, С.М. Агаяну и Ш.Р. Богоутдинову –

за обсуждение отдельных важных вопросов по теме диссертации, а также Е.М. Граевой за участие в подготовке базы данных по крупным и суперкрупным месторождениям, которая и легла в основу диссертации. Автор также признателен д.г.-м.н. А.В. Ткачеву (ГГМ РАН, Москва) за любезное предоставление более детальной базы данных по медным месторождениям, академику Д.В. Рундквисту, чл.-корр. РАН, директору ИФЗ РАН С.А. Тихоцкому, д.ф.-м.н. А.И. Горшкову (ИТПЗ РАН) и д.г.-м.н. К.С. Иванову (ИГиГ УрО РАН) за интерес к работе и содержательные и ценные рецензии представленных к публикации статей, что позволило глубже, с предметно-содержательных геохимических или геологических позиций проинтерпретировать ряд полученных в работе формально-математических статистических соотношений и закономерностей.

ГЛАВА 1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА МЕСТОРОЖДЕНИЙ ПО ОБЪЕМУ ЗАПАСОВ И ВЕЛИЧИНАМ КОНЦЕНТРАЦИИ РУДНЫХ КОМПОНЕНТ

В данной главе рассматривается круг вопросов от распределения месторождений по объемам запасов и концентраций к возможным схемам процессов образования рудных месторождений, и возникающей в связи с этим генетическими (то есть основанной на способах формирования) моделями формирования месторождений.

1.1 Общая характеристика процессов образования месторождений

1.1.1 Описание процессов методами физической химии

Одним из ключевых вопросов в формировании месторождений является физика процесса концентрирования компонент земной коры в отдельных областях пространства. Обсуждения термодинамических вопросов часто носят умозрительный, в лучшем случае – оценочный характер, потому как для точного термодинамического расчета не применимы классические химические справочники, которые содержат данные экспериментов и расчетов заведомо упрощенных систем. Любая попытка описать поведение относительно сложной системы, например, отдельного иона в растворе, приводит к многократному усложнению и без того не простой теории. Попытки описать трех- и четырехкомпонентные системы наталкиваются порой на серьезные трудности, которые можно решить только рядом приближений. Сложные системы, в нашем случае – Землю, можно рассматривать с общей точки зрения проточного химического реактора (в таком реакторе все стадии процесса: подача реагентов, химическая реакция, вывод готового продукта – осуществляются одновременно, т.е. как бы параллельно друг другу) [Петьков, 2012], однако упрощения, которые при этом необходимо будет принять, могут критически сказаться на характере и обоснованности результатов.

С другой стороны, вполне определенно можно утверждать, что при нахождении системы вдали от точки равновесия, флуктуации энтропии настолько велики, что возможно образование не только локальных максимумов концентраций различных компонент земной коры, но и формирования самоорганизующихся структур, как частный случай проявления

локального уменьшения энтропии. Это дает возможность говорить о возможном образовании месторождений не только вследствие стохастических колебаний концентрации полезных компонент в изучаемом объеме, но и формировании условий типа проточного химического реактора для переработки предшественников в полезные ископаемые. Помимо образования тех или иных соединений, как в случае с углеводородными месторождениями (УВ-месторождениями), так и в случае рудных месторождений, важным является концентрирование полезного компонента в резервуарах. Для некоторых частных случаев важно понимать, что помимо образования и концентрирования полезных ископаемых, так же происходит полный или частичный вынос содержимого месторождения на поверхность.

Классический подход изучения компонент месторождений подразумевает помимо привязки их к изученным структурам (разломам, аномалиям и так далее), привязку к геологическим эпохам и выявлению возможной последовательности концентрирования компонент во времени. Эти временные рамки подчас достаточно велики, но очевиден тот факт, что, судя по количеству разных (по возрасту и объему) месторождений, запас времени велик по сравнению с временем, необходимым для формирования крупного или суперкрупного месторождения. В предлагаемой работе при исследовании эмпирических распределений не обсуждается возраст месторождений, однако, поскольку исследование затрагивает вопросы концентрирования и накопления полезных компонент, фактор времени здесь определенно играет важную роль и является одним из определяющих собственно размер месторождения (о концентрации будет сказано далее в тексте). Если рассматривать (в самом первом приближении) процессы превращения вещества, проходящие в недрах Земли, как последовательность химических реакций, каждая из которых могут быть разбиты на последовательности «формально простых» реакций, то для описания скорости каждой такой химической реакции мы можем использовать закон действующих масс (1.1). (Под термином формально простой реакции здесь мы понимаем элементарную стадию химической реакции с неустойчивыми промежуточными продуктами). Для простого превращения $aA + bB + dD + \dots \rightarrow eE + \dots$ закон действующих масс выглядит следующим образом [Краснов, 1995]:

$$v = k \cdot C_A^a \cdot C_B^b \cdot C_D^d, \quad (1.1)$$

где v – это скорость химической реакции, k – константа скорости реакции, A, B, D, \dots – условные реагенты, вступающие в реакцию, E – один из продуктов реакции, a, b, d, e – соответствующие стехиометрические коэффициенты. Концентрации реагентов указаны соответственно C_A, C_B, C_D .

Согласно приведенному выражению, параметрами, определяющими скорость реакции, являются непосредственно концентрации прекурсоров (лат. praecursor — предшественник) – исходных веществ до начала химического превращения (приведенная формула показывает общее соотношение, однако, для численных расчетов необходимо использовать понятие *активности* компонента, которое не всегда совпадает по значению с концентрацией). Это очевидное условие как минимум с точки зрения здравого смысла: не имея достаточного количества вещества в левой части уравнения, мы не получим достаточных эффективных взаимодействий, приводящих к накоплению количества вещества справа химического уравнения. Однако, в уравнении (1.1), степень, в которую возводится концентрация, (или порядок реакции по веществу) не всегда соответствует стехиометрическим коэффициентам при соответствующих участниках реакции. Например, в случае, когда наблюдается раздел фаз (в гетерогенных реакциях) порядок реакции равен нулю. В таких реакциях концентрация не будет влиять на скорость процесса.

Еще одним фактором, определяющим скорость реакции, может выступать температура. Согласно правилу Ван-Гоффа: при повышении температуры на каждые 10 градусов, скорость химических реакций, как правило, увеличивается в 2-4 раза. Однако применять это правило к химическим процессам в недрах Земли можно только в качественном смысле: во-первых, это правило было выведено эмпирическим путем для ограниченного круга «лабораторных» реакций, и во-вторых, в такой формулировке оно оказывается верным для достаточно ограниченного диапазона температур. Тем не менее, скорость реакции в большинстве случаев возрастает при увеличении температуры.

Приведенные соображения не позволяют рассчитать точные скорости образования химических соединений в рассматриваемых условиях, тем не менее, они полезны для качественного анализа свойств возможных процессов, протекающих при формировании месторождений. Мы можем сказать, что увеличение концентраций вещества-прекурсора(ов) положительно влияет на динамику процесса образования месторождения, а в купе с повышением температуры мы можем наблюдать заметное ускорение химических процессов.

Однако сама по себе скорость реакции не говорит об обязательном накоплении полезного компонента в месторождении. С точки зрения химической термодинамики скорость реакции не всегда достаточна для определения непосредственного выхода полезных компонент. Дело в том, что наряду с прямой реакцией, почти всегда протекают процессы обратные синтезу вещества. Например, если скорость прямой реакции увеличивается с повышением температуры, и скорость обратной реакции также увеличивается, то выход

химической реакции не изменится, однако изменится скорость достижения равновесия. Поскольку сторонний наблюдатель не может в большинстве случаев явным образом отдельно наблюдать течение прямого и обратного процесса (яркий пример, когда это все-таки можно сделать легко, это реакции типа маятника и, как частный пример, – реакция Белоусова-Жаботинского), то для него “окончанием” химической реакции будет являться факт постоянной концентрации компонент [Белоусов, 1951].

Образование месторождений является результатом химических процессов: сложных, многоступенчатых, многокомпонентных и не совсем типичных для лабораторных исследований. Однако каждая “формально простая” реакция в составе этих процессов может быть описана согласно изложенным соображениям, а значит, и вся система химических уравнений будет подчиняться этим правилам. Выход этих процессов может быть охарактеризован некоторой константой, аналогичной константе равновесия химической реакции (1.2) [Краснов, 1995] в простых реакциях типа: $aA + bB \leftrightarrow cC + dD$:

$$K_c = \frac{C_C^c \cdot C_D^d}{C_A^a \cdot C_B^b} \quad (1.2)$$

Существуют реакции, которые “запрещены” при некоторых условиях и начинают проходить при изменении условий (давление, температура и т.д.) однако этот запрет необходимо воспринимать с рядом оговорок. “Запрещением” той или иной реакции может быть ее низкая константа равновесия, которая не позволяет получить достаточное количество вещества на выходе (что интерпретируется наблюдателем, подчас как отсутствие выхода как такового) и тогда, без изменения условий реакции, ее считают не продуктивной.

Помимо изменения условий протекания реакции, на практике часто используют методы выведения продуктов из активной зоны реакции, изменяя состав системы в каждый момент времени таким образом, что в реакторе нет продуктов реакции (то есть, исходных веществ для протекания обратной реакции), и химическое равновесие смещается в требуемую сторону (в данном случае – в правую часть реакции).

На основании вышесказанных общих положений, можно сделать вывод, что при условии протекания реакции в достаточно большом временном промежутке (а время образования месторождений обычно много больше времени любого, когда-либо поставленного в лабораторных условиях химического эксперимента), можно сказать, что пограничные значения температуры и давления не будут играть значительной роли, и откровенно невыгодные или «бесперспективные» реакции с лабораторной или промышленной точки зрения, в случае геологии, а именно в случае огромного запаса по времени химической

реакции, могут привести к значительному выходу, и, в конечном счете, к залежам полезных ископаемых.

Особенно хотелось бы подчеркнуть, что мы специально не упомянули о наличии структур, которые за счет своей морфологии и состава могут играть как роль катализатора так и ингибитора, что так же усложняет обсуждаемую систему. Их значение трудно переоценить, однако мы оставим их влияние за скобками, так как химический катализ на данный момент в настолько специфических условиях, коими являются условия образования месторождений, представляет собой отдельную ресурсоемкую задачу (не обсуждаемую в данной диссертации).

Образование химических соединений, входящих в состав полезных ископаемых, очевидно, еще не гарантирует образования самого месторождения. Для концентрации накопленных продуктов химической реакции существуют различные относительно простые лабораторные и промышленные способы, например, перекристаллизация или зонная плавка. Основным условием проведения этих процессов является наличие такой разности температур, которая обуславливала бы различную растворяющую способность растворителя по отношению к различным компонентам раствора. Вторым важным фактором протекания этих процессов является перемещение и удаление компонентов раствора из зоны реакции. Эти условия теоретически возможны при перемещении и переработки реагирующих масс в условиях активной тектоники, в частности, как путем переноса больших объемов вещества, так и переработкой этих больших объемов потоками флюида.

Непосредственный поиск подтверждения приведенных общих положений о существовании подобных структур затруднен с точки зрения экспериментальной проверки вследствие их большого масштаба и ограниченных данных о реальном химическом глубинном строении Земли. Однако остается открытым вопрос: возможно ли говорить об образовании самоорганизующихся структур и целых систем по косвенным признакам? И если да, то какие признаки могут быть использованы для анализа процессов, их порождающих?

Подобный вопрос возникал уже, например, при исследовании землетрясений. [Дискретные свойства..., 1989, Садовский, 1991, Tutcotte, 1997, и др.] Так, при анализе распределений величин сейсмической энергии был открыт закон Гутенберга-Рихтера (1.3) [Gutenberg, 1944], который играет ключевую роль в сейсмологии.

$$\log_{10} N = a - bM \quad (1.3)$$

Наличие степенного распределения значений сейсмического момента указывает на термодинамически неравновесный динамический характер этих процессов

[Мандельброт, 2002; Tutcotte, 1997]. Закон Гутенберга-Рихтера (1.3) часто обсуждается вместе с вопросами самоподобия и самоорганизации структур в земной коре, мантии и планетарном масштабе в целом. К настоящему времени обнаружены, а также экспериментально и теоретически исследованы явления самоорганизации в физических, физико-химических, биологических объектах [Лоскутов, 1990; Tutcotte, 1997; Конторович, 1998 и др.]. Так, в работах [Пригожин, 1979] авторы обращаются к теории диссипативных структур – устойчивых пространственно-неоднородных образований, возникающих в результате развития неустойчивости в неравновесной диссипативной среде. Это побудило многих авторов предлагать различные математические модели сейсмических процессов (а в конечном счете – искать решение вопроса предсказания землетрясений), способных обеспечить подобное распределение (1.3). Среди других вариантов [Григорян, 1988] обоснованным является предложение изучать такие процессы при помощи уравнений нелинейной динамики, тесно связанной с ключевыми понятиями неравновесной физики, а именно в рамках режимов с обострением. [Князева, 1994] Основой таких процессов с обострением является механизм нелинейной обратной связи – вблизи момента обострения структура развивается чрезвычайно быстро, в отличие от ранних стадий процесса, когда малые возмущения способны гаситься. Фактически, процесс приобретает лавинообразный характер. При компьютерном моделировании динамики лавин была выдвинута концепция самоорганизованной критичности [Ваг, 1987, 1989]; в связи с нелинейностью системы слабое возмущение в очаге может спровоцировать землетрясение. Приведенные работы являются основными и послужили толчком к обстоятельному изучению процессов лежащих в основе подготовки землетрясений. Общая сейсмическая теория на данный момент не разработана, однако подходы и набор методов изучения геофизических объектов, которые уже были использованы, хорошо зарекомендовали себя при исследовании широкого круга вопросов сейсмичности. На данный момент многие исследователи придерживаются концепции «геофизической среды» [Садовский, 1979, 1986, 1987], которая ставит ряд проблем, связанных с описанием процессов, проходящих в сложных нелинейных энергонасыщенных средах. Одним из используемых методов описания является изучение фрактальной размерности геофизической среды. Очевидно, что вопрос происхождения месторождений может быть рассмотрен как результат процессов, происходящих в тех же условиях и в рамках той же модели геофизической среды, что и вопрос происхождения землетрясений (с той оговоркой, что такой общепризнанной модели на данный момент не существует). А подходы, использованные в сейсмологии, могут быть применены к другим проявлениям геофизической среды – генезису месторождений.

Подобные рассуждения в некотором смысле преждевременны и приведены с целью показать общность среды и, возможно, механизмов их порождающих. Надо признать, что на данный момент нет оснований утверждать о понимании процессов рудогенеза и сейсмической активности, и объединения этих явлений в рамках единой предсказательной модели. Тем не менее, научные поиски в этом направлении ведутся постоянно, и из попыток прийти к указанию на возможные закономерности рудогенеза следует актуальность предлагаемой работы.

Общехимические принципы синтеза и концентрирования соединений, изложенные выше подразумевают образование структур, обладающих определенным набором свойств. Поскольку современное термодинамическое состояние Земли далеко от состояния равновесия, можно предположить, что самоорганизующиеся структуры должны быть представлены в свойствах тех распределений, которые доступны современному наблюдателю.

1.1.2 Типовые распределения в динамических системах

Важной характерной чертой, указывающей на неравновесный, динамический характер процессов формирования месторождений (как рудных, так и углеводородных) является факт высокой концентрации запасов в небольшом числе месторождений. Математически факт высокого (часто определяющего) вклада малого числа единичных событий в суммарный результат обычно выражается степенным характером распределения числа событий от их величины (вклада, объема). Для месторождений углеводородов (УВ) считается установленным [Конторович, 1985; Turcotte, 1997; Бурштейн, 2006; Родкин, 2006, 2011; и др.], а для рудных месторождений полагается весьма вероятным [Turcotte, 1997; Power distributions., 2010; Rodkin, 2011], что эмпирическое распределение числа месторождений в зависимости от величины их запасов $N(V)$ может быть описано степенным законом. То есть, число N месторождений с объемом запасов не менее V отвечает соотношению:

$$N(V) \cong K \times V^\beta, \quad (1.4)$$

где K – некий коэффициент, β – показатель степени распределения, при этом значение β весьма часто оказывается близким к единице.

Степенные соотношения типа (1.4) характерны для разных природных явлений, и существование таких соотношений интерпретируется обычно как свидетельство неравновесного и фрактального характера соответствующей системы или процесса

[Turcotte, 1997; Sornette, 2000; Родкин, 2011]. Соответствие эмпирического распределения $N(V)$ степенному закону (при типичных значениях $\beta \approx 1$, тем более, при $\beta < 1$) означает очень высокую степень концентрации запасов в небольшом числе крупнейших месторождений. Действительно, если параметр степени в этом законе $\beta \leq 2$, то распределение имеет бесконечное значение второго момента распределения (дисперсии). При значении $\beta \leq 1$ среднее значение распределения (1.4) бесконечно, что вызывает серьезные затруднения при использовании для описания таких распределений обычных статистических характеристик как среднего значения и дисперсии. При анализе такого рода данных следует использовать методы порядковой статистики (для реальных выборок, ввиду их конечного размера, бесконечные значения не реализуются и находят выражение в неустойчивости выборных значений среднего и дисперсии). Для природных систем наиболее типичны значения $\beta \approx 1$, что указывает на близость такого рода степенных распределений к процессам типа фликкер-шума, в которых энергетический спектр процессов E описывается соотношением:

$$E \sim 1/f^\alpha, \quad (1.5)$$

где f – частота, $\alpha \approx 1$

В сейсмологии степенной закон распределения известен как закон повторяемости землетрясений Гутенберга-Рихтера. При этом типичные значения параметра β для распределения величин сейсмической энергии близки к 0.5-0.6, а для величин сейсмического момента $\beta \approx 0.7$. В терминах магнитуд это означает, что увеличению магнитуды на единицу соответствует уменьшение числа землетрясений примерно в 10 раз и увеличение энергии одного землетрясения примерно в 30 раз.

Закон Гуттенберга-Рихтера играет ключевую роль в сейсмологии. По аналогии можно ожидать, что исследование характера распределения числа объектов в зависимости от их величины окажется важным в понимании также и других типов объектов и процессов [Шатахцян, 2011; Родкин, 2013]. В частности, исследование характера эмпирических распределений числа месторождений от величины их запасов может оказаться важным как в плане лучшего понимания процессов рудогенеза, так и для уточнения ресурсной базы. Поскольку для месторождений углеводородов считается установленным [Конторович, 1985; Бурштейн, 2006], что эмпирическое распределение числа крупных месторождений в зависимости от величины их запасов $N(V)$ может быть описано обрезанным степенным законом (и показатель степени распределения β оказывается при этом близким к единице). Такой закон распределения может быть использованным для прогноза числа неоткрытых

месторождений разного ранга. Существуют указания, что аналогичная степенная зависимость выполняется также и для рудных месторождений [Turcotte, 1997].

Для рудных месторождений оценка величины запасов бывает осложнена комплексным характером месторождения, часто включающего целый комплекс различных полезных рудных компонент. Учет этого обстоятельства возможен путем суммирования рангов величин запасов для разных компонент, или суммированием стоимости всех рудных компонент. В качестве примера такого подхода на рисунке 1.1, по данным [Largest mineral..., 2006], приведены данные по 8-и крупнейшим Pb-Zn месторождениям мира. Стоимость рудных компонент указана в миллиардах долларов. Видно, что эмпирические данные достаточно хорошо описываются степенной зависимостью с показателем степени близким к единице, $\beta=1.03$. При использовании логарифмических координат по осям x и y (в отличие от обычно используемого линейного представления) ранговый график в области крупнейших месторождений остается непрерывным и близким к прямой линии, что и отражает выполнение степенного закона распределения в области крупных и суперкрупных месторождений. Непрерывный характер поведения рангового графика в двойных логарифмических координатах указывает (вопреки имеющему широкое распространение взгляду) на однотипность характера процессов, приводящих к формированию месторождений разного ранга. В линейных координатах точки, отвечающие крупным и суперкрупным месторождениям часто оказываются на ранговом графике изолированными, что иногда трактуется как указание на особый характер процессов, приводящих к формированию крупных и суперкрупных месторождений.

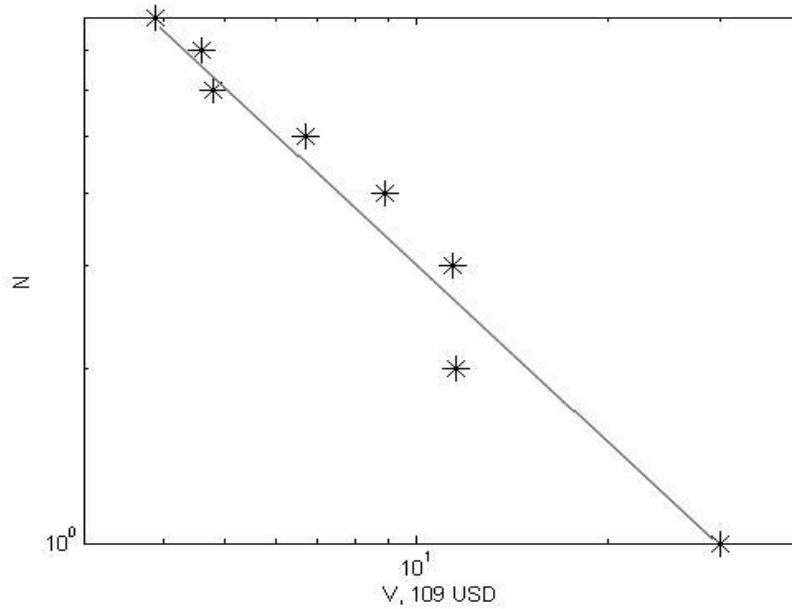


Рисунок 1.1 – Распределение величин суммарных запасов 8 крупнейших в мире месторождений Pb-Zn (величина запасов V дана в стоимостном выражении, миллиарды долларов).

Перейдем к результатам статистических исследований эмпирических законов распределения величин запасов и концентраций полезного компонента в рудных месторождениях на гораздо большем объеме данных, а именно на основе базы данных (БД), построенной на основе ГИС КСКМ [Largest mineral..., 2006].

1.2 Данные и анализ данных

Для выполнения работы на первом этапе была использована ГИС «Крупные и суперкрупные месторождения» ГИС КСКМ [Largest mineral..., 2006]. В ней содержится информация о крупных и суперкрупных месторождениях в виде набора электронных карточек с данными о каждом месторождении в текстовом виде: название, страна и регион, точные координаты (широта и долгота), статус разработки, объем запасов и концентрация полезных компонент, ссылки на источники и дополнительная информация о возрасте и геологическом строении (пример электронной карточки представлен на рисунке 1.2). Были использованы данные координат, объемов запасов добываемых элементов их концентрация, и сформирована база данных БД использованная в работе. Отдельные значения в БД дополнялись и уточнялись

по другим источникам. При компиляции БД в данных ГИС КСКМ был выявлен ряд неточностей, о которых были проинформированы создатели этой ГИС. Общее количество месторождений в полученной базе 1163. Пример участка БД приведен на рисунке 1.3.

BENIN

NAME: LOUMBOU-LOUMBOU

COUNTRY: BENIN

CONTINENT: AFRICA

PROVINCE: BORGOU

DIVISION: deposit

STATUS: assessed

SIZE ORE MODEL: Oolitic and pisolitic ore beds partly enriched by weathering at the surface

SIZE: LARGE

REGIONAL GEOLOGICAL STRUCTURE: Benin-Nigeria Shield

LOCAL GEOLOGICAL STRUCTURE: Sokoto Basin

ORE DISTRICT STRUCTURAL CONTROL: No information

ORE STRUCTURAL CONTROL: Stratigraphic

NOTES: Total resources are shown for Loumbou-Loumbou and Madekali deposits (Madekali is middle).

ELEMENT	VALUE	UNIT	PRODUCED	TOTAL	UNIT	TYPE
Fe	46.00	%	-----	233.00	Mt	A

REFERENCE: Le Benin//www.izf.net/izf/Guide/Benin/Page1.htm

Database of African mineral deposits of E.Hammerback

Countries

NAME: Benin

Geology

LITHOLOGY: Sedimentary rocks (or undifferentiated facies)

STRATIGRAPHY: Jurassic & Cretaceous - Mesozoic

Tectonic units

AGE: PR1

INDEX: PR1

AGE S: Paleoproterozoic

TECT UNIT: Accretion-collision Proterozoic complexes

Tectonic lines

LINE: Boundaries of tectonic units

Deposits

NAME: LOUMBOU-LOUMBOU

ELEMENT(S): Fe

COUNTRY: BENIN

PROVINCE: BORGOU

TYPE S: brown ironstone type

GENESIS: sedimentary

MINERAL S: goethite, hematite

AGE: Cenozoic

Рисунок 1.2 – Пример электронной карточки месторождения из ГИС КСКМ

1	A	B	C	D	AH	AI	AJ	AK	AM	AN	AO	AP	AQ	AR	AS	AT	AU	AV	AW	AX	AY	AZ	BA
1	NAME	LONGITUD	LATTITUD	Total	Cr2O3	Value	TotalM	Cr2O	Value	Total k	Cu	Value	TotalM	diamon	Value	TotalN	Fe	Value	TotalM	FeO	Value	Total	
157	1109 BUSHVELD EAST	30	-24,6	NaN	3	38,5	2100	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
158	1110 BUSHVELD NORTH	28,84	-24	NaN	3	45	9999	NaN	NaN	NaN	NaN	1	0,18	9999	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
159	1111 BUSHVELD NORTH-WEST	27	-25	NaN	3	38,5	550	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
160	1112 BIG SYNCLINE	18,79	-30,2333	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	1	0,09	0,1	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
161	1113 BLACK MOUNTAIN	18,73	-29,23	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	1	0,75	0,8	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
162	1114 BOTHAVILLE	26,55	-27,2	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
163	1115 BROKEN HILL	18,8	-29,2	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
164	1119 BEESHOECK	25,29	-23	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	3	66	679
165	1076 GETA	32,11	-2,83	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
166	1077 KABANGA	30,56	-2,88	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	1	0,27	0,07	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
167	1078 LIGANGA	34,92	-9,92	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	3	40	480
168	1079 MWADUI	33,6	-3,55	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	3	0,1	23,5	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
169	1083 BULYANHULU	32,47	-3,2	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
170	1072 BUEM	0,67	9,33	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	3	45	500
171	1073 HAMMAM ZRIBA	10,2	36,28	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
172	1074 REDEYEF	8,15	34,4	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
173	1075 SRA OUERTANE	8,75	36,22	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
174	1064 EL FARFARAT	-13,01	23,51	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	3	9999	120
175	1068 ATULA	-9,28	26,65	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	3	9999	264
176	1069 BOU CRAA	-12,92	26,37	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
177	1070 BOU DERA-SFARIAT	-12,1	24,5	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	3	9999	160
178	1071 DALAT-ASSIROUIT	-11,5	26,12	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
179	1056 NCHANGA	27,87	-12,52	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
180	1057 NKANA-MINDOLA	28,21	-12,84	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	3	3,64	14,56	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
181	1060 KALUWE	30,02	-15,1667	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
182	1061 KONKOLA	27,82	-12,79	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	3	2,95	25,5	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
183	1062 LUANSHYA	28,38	-13,14	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	3	2,79	8,6	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
184	1063 MUFULIRA	28,19	-12,5	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	3	3,36	9999	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
185	1065 CHAMBISHI	23,05	-12,69	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	3	2,55	10,4	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
186	1066 SHIMMUNGO-LUMWANA	25,85	-12,18	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	3	0,7	6,3	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
187	1067 KABWE	28,4333	-14,4667	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	1	9999	9999	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
188	1052 GREAT DYKE NORTH	30,71	-17,24	NaN	3	49	70	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
189	1053 GREAT DYKE SOUTH	29,82	-20,27	NaN	3	42	93	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
190	1054 KAMATVI	27,05	-18,33	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
191	1058 BKITA	31,5	-19,83	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	2	24	24	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
192	1059 GREAT DYKE MIDDLE	30,4	-18,27	NaN	3	42	23	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	9999	20,32

Рисунок 1.3 – Участок скомпилированной БД

Для исследования закона распределения, среди различных рудных компонент были выбраны два десятка наиболее часто встречающихся (по мировым данным) видов рудного сырья (рисунок 1.4). Для каждого из них был охарактеризован закон распределения числа месторождений от объемов запасов и концентрации полезного компонента. В исследуемую группу месторождений были добавлены месторождения, содержащие алмаз, как представителя отдельной, специфической группы, хотя количество упоминаний в ГИС его значительно ниже.

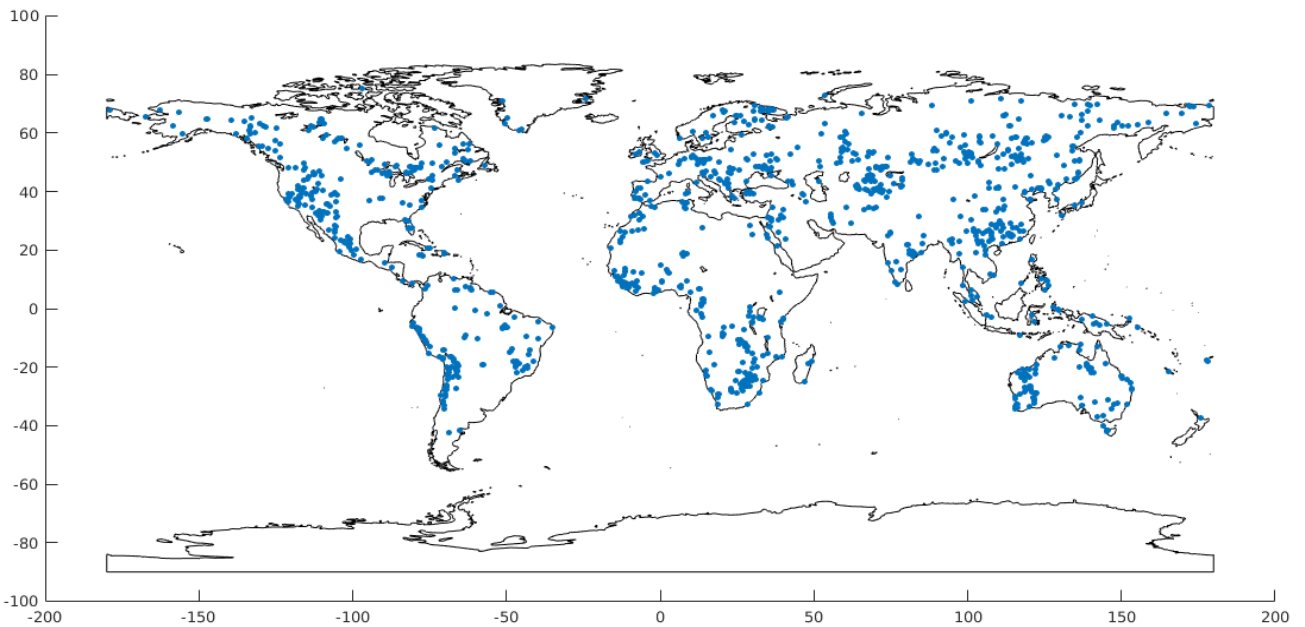


Рисунок 1.4 – Месторождения выделенных наиболее часто встречающихся месторождений, наложенные на карту

Как и в предыдущем опыте построения линейных графиков, координаты точек, отвечающие крупным и суперкрупным месторождениям, обычно оказываются на ранговом графике изолированными (что являлось основанием для предположений об особом характере процессов, приводящих к формированию именно крупных и суперкрупных месторождений). Однако, при представлении данных в двойных логарифмических координатах, получаемый ранговый график оказывается непрерывным и практически прямолинейным (в области надежно определяемых крупных месторождений). Такой характер графиков указывает на однотипность процессов, приводящих к формированию месторождений разного ранга, в том числе и суперкрупных. Типичные примеры распределений запасов месторождений приведены в левом столбце рисунка 1.5.

По данным скомпилированной БД были, по формуле Хилла [Писаренко, 2007], рассчитаны величины показателя степени распределения для разных типов месторождений. Полученные значения коэффициента β , указанные в таблице 1.1 так же, как и в случае углеводородных месторождений, оказались близки к единице. Значения β , большие и меньшие единицы говорят о меньшей или, соответственно, большей степени концентрации величин запасов в малом числе крупных (и суперкрупных) месторождений. Значения β меньшие единицы отвечают формально бесконечным средним значениям величин запасов с более высокой степенью их концентрации в крупнейших месторождениях. Указанием на существенную неравновесность процесса образования рудных месторождений помимо параметра β может являться прослеживаемая тесная корреляция между объемами запасов и концентраций рудного сырья. Корреляция между объемами запасов и концентрацией (таблица 1.2) говорит об их совместном, согласованном увеличении.

Распределение концентраций всех рассмотренных типов месторождений (рисунок 1.5) явным образом отличается от степенного и, в соответствии с предположениями [Turcotte, 1997] полученными по меньшему объему данных, может быть аппроксимировано логнормальным законом распределения.

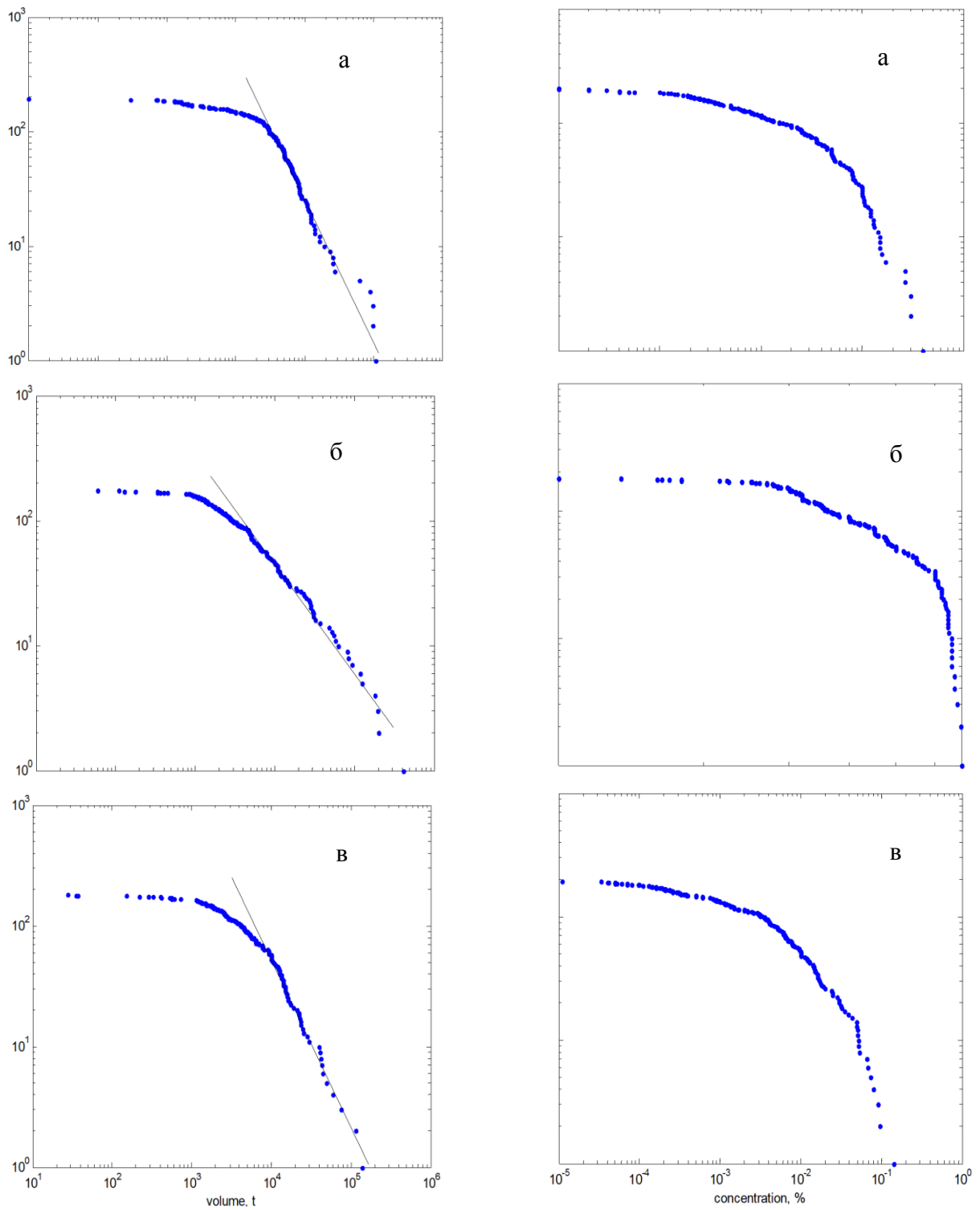


Рисунок 1.5 – Примеры типичных распределений величин запасов и концентраций рудных месторождений: а - Au, б - Fe, в - Ag; слева - объемы запасов (а, в – тонны, б – мегатонны), дана аппроксимирующая прямая степенного распределения; справа – концентрации, выраженные в процентах. По оси ординат даны количество месторождений, N

Ранее было отмечено, что наклон графика повторяемости величин сейсмического момента и энергии землетрясений отвечает степенному закону распределения с параметром распределения $\beta \leq 1$, то есть с теоретически бесконечным средним значением [Писаренко, 2007]. Очевидно, что такой закон распределения не может выполняться для сколь угодно сильных землетрясений; эмпирическое распределение сильнейших событий должно отличаться от степенного закона с $\beta \leq 1$, отвечая некоторому распределению с конечным средним значением и формируя хорошо известный загиб вниз графика повторяемости землетрясений [Модели генерации..., 2009]. Аналогичная ситуация имеет место и для распределения величин запасов месторождений Fe. Для КСКМ месторождений Fe значение параметра степенного распределения $\beta = 0.86 \pm 0.17$, то есть с большой степенью вероятности имеем $\beta < 1$. Аналогично случаю землетрясений, такое распределение не может выполняться для крупнейших месторождений, и следует ожидать, что график распределения для запасов Fe будет загибаться вниз, что мы и видим на рисунке 1.5. Аналогично, но на меньшем наборе данных и потому менее определенно, ведут себя графики распределений для Ta и W; отметим, что определенный загиб графика наблюдается также для Zn хотя параметр $\beta \geq 1$.

Иная ситуация имеет место для месторождений Ti, редкоземельных металлов и алмазов. Параметр степенного закона распределения здесь $\beta < 1$, число месторождений довольно мало, и загиба графика вниз в области крупнейших месторождений не наблюдается. Можно предположить, что такая ситуация связана с тем, что крупнейшие месторождения этого типа еще не открыты или объемы уже открытых крупнейших месторождений сильно завышены.

В таблице 1.1 представлены параметры оптимального логнормального распределения (среднее значение μ и разброс σ), а также результаты проверки справедливости такой аппроксимации методом хи-квадрат. Проверка методом хи-квадрат допускает неоднозначность за счет разных разбиений сравниваемых эмпирического и модельного распределений на интервалы. Хорошая аппроксимация в таблице 1.1 отвечает выполнимости критерия хи-квадрат с вероятностью 90% для всего набора разбиений. Удовлетворительно и плохо – означает выполнению этого критерия для значительного и малого числа разбиений соответственно. Нет – означает невыполнимость критерия хи-квадрат для всего набора разбиений.

Таблица 1.1 – Параметры эмпирических распределений величин запасов и концентраций крупнейших рудных месторождений мира

Веще- ство	Число место- рожде- ний	Параметры логнормального распределения			Степенное распределение
		<i>mi</i>	<i>sigma</i>	качество аппрок- симации	Параметр β (номера месторождений)*
Обогащение в нижней коре					
Au	200	-9.0±0.22	1.85±0.15	удовл.	1.29±0.17 (1-70)
Ag	192	-6±0.25	2.0±0.17	хорошее	1.38±0.22 (2-40)
Co	56	-2.34±0.23	1.0±0.16	хорошее	1.02±0.19 (3-30)
Cu	212	-0.57±0.13	1.11±0.09	хорошее	1.43±0.29 (2-30)
Ni	73	-0.06±0.17	0.86±0.13	удовл	1.03±0.2 (1-30)
Fe	178	3.67±0.05	0.35±0.04	нет	0.86±0.17 (4-30)
TiO ₂	37	2.37±0.21	0.7±0.15	хорошее	0.75±0.17 (1-20)
Обогащение в верхней коре					
Pb	135	0.49±0.21	1.41±0.16	плохое	1.45±0.38 (1-15)
Ta ₂ O ₅	46	-4.0±0.17	0.68±0.12	нет	0.87±0.26 (2-13)
U	82	2.4±0.25	1.39±0.18	удовл	1.36±0.30 (1-20)
WO ₃	57	-1.64±0.3	1.32±0.22	удовл	1.1±0.2 (2-30)
Mo	105	-3.34±0.16	1.0±0.11	хорошее	1.33±0.27 (2-30)
ZrO ₂	45	0.24±0.34	0.98±0.25	хорошее	0.97±0.2 (2-30)
Без сильного обогащения на границе верхней и нижней коры					
Алмаз	24	2.8±1.1	4.4±1.1	нет	0.86±0.25 (1- 13)
Zn	139	1.27±0.18	1.3±0.13	нет	1.1±0.11 (5-100)
P ₂ O ₅	80	2.57±0.16	0.85±0.11	нет	1.33±0.34 (2-15)
Редкие Земли	36	0.07±0.47	1.63±0.35	удовл.	0.45±0.11 (1-20)

Примечание –* использованы при расчете параметра β степенного закона распределения

Таблица 1.2 – Примеры значений коэффициента корреляции величин запасов и концентрации для месторождений разного состава

Компонент	Число месторождений в базе данных	Коэффициенты корреляции величин запасов и концентраций
Ag	192	0.45
Au	200	0.38
Co	56	0.11
Cu	212	0.40
Ni	73	0.37
Fe	178	0.15
TiO ₂	37	-0.16
Pb	135	0.49
Ta ₂ O ₅	46	0.06
U	82	0.08
WO ₃	57	0.25
Mo	105	0.28
ZrO ₂	45	0.16
алмазы	24	0.11
Zn	139	0.43
P ₂ O ₅	80	0.31
Редкие земли	36	-0.14

Исходя из данных таблицы 1.1 (и результатов других авторов), можно сделать вывод о хорошей выполнимости степенного распределения для величин запасов крупнейших месторождений и о вероятной применимости логнормального закона распределения для величин концентраций рудной компоненты. Резонно задаться вопросом о механизмах реализации таких распределений и о возможной связи параметров распределений с иными характеристиками процессов формирования рудных месторождений.

1.3 Модели генерации распределений величин объемов запасов и концентрации рудных компонент

Возникает вопрос, в какой мере известные модели рудогенеза отвечают выявленным законам распределения величин запасов и концентрации, и что можно уточнить в этих моделях, учитывая реализацию степенного и логнормального законов распределения для величин запасов и концентраций рудных компонент. В этой связи обсудим ряд простых схем реализации логнормального и степенного законов распределения. Подробное обсуждение генерации выявленных зависимостей будет изложено в Главе 4.

1.3.1 Условия формирования логнормального и степенного распределений

Логнормальный закон распределения реализуется при перемножении нескольких независимых параметров. Применительно к исследуемым данным, такой закон распределения величин концентрации полезной компоненты реализуется, если происходит ряд последовательных стадий обогащения рудного вещества, когда финальные величины концентраций представимы как произведения величин обогащения на каждом (независимом) этапе обогащения. Отметим, что многоэтапность процесса формирования многих крупных месторождений подкрепляется геологическими данными. Ранее математическая модель такого процесса была предложена в [Turcotte, 1997].

Степенной характер распределения отвечает более “тяжелому” хвосту распределения, чем логнормальный закон. Поэтому для реализации степенного закона распределения величин запасов крупных месторождений, кроме аналога многоэтапности процесса формирования, требуется дополнительно предположить существование цепи положительной обратной связи между величиной уже накопленных запасов и скоростью их пополнения.

Отметим, для полноты картины, то обстоятельство, что степенной характер распределения характерен только для крупных рудных месторождений, распределение средних и малых месторождений заметно отличается от степенного закона распределения и характеризуется существенно меньшим, чем для случая степенного распределения, числом относительно меньших по запасам месторождений [Largest mineral..., 2006], такое отклонение, впрочем, наиболее естественно может быть объяснено неполнотой данных по относительно меньшим месторождениям.

В последней главе диссертации, после проведения классификации и кластеризации рудных компонент на основе фрактальной размерности и выбранной меры близости, вопрос о причастности выявленных групп к процессам формирования рудных месторождений будет дополнительно освещен в связи с изложенными данными о классификации рудных месторождений.

1.4 Выводы к главе 1

Для выполнения работы на основе географической информационной системы «Крупные и суперкрупные месторождения» (ГИС КСКМ) и других источников была составлена база данных параметров крупных рудных месторождений мира: координаты и название каждого месторождения, объем запасов и концентрация (для каждого полезного компонента). Полученная база данных дополнена более детальными данными по месторождениям меди.

На существенно большем, чем когда-либо ранее фактическом материале, в основном, по данным по крупным и суперкрупным месторождениям проведен анализ характера распределения числа рудных месторождений разного типа в зависимости от концентрации рудной компоненты и от величины запасов. Показано, что распределение числа крупных и суперкрупных месторождений в зависимости от величины запасов может быть описано степенным законом распределения, причем значения показателя степени распределения, значимо различаясь для разных типов месторождений, близки к единице (аналогично тому, как это было показано ранее для месторождений УВ).

Распределения числа рудных месторождений разного типа в зависимости от концентрации рудных компонент, по-видимому (как и предполагалось ранее рядом авторов), могут быть описаны логнормальным законом распределения. Реализация такого распределения свидетельствует в пользу типичности ситуации формирования месторождений в ходе нескольких стадий концентрирования рудного компонента.

Помимо подтверждения степенного распределения величин запасов, аналогичного закону Гутенберга-Рихтера, дополнительным указанием на существенно неравновесный характер процессов, ответственных за формирование рудных месторождений, является выявленная положительная регрессионная связь между объемами запасов и концентрациями рудного сырья.

Выявленные закономерности (в частности, рассчитанный параметр степенного распределения β и поведение накопительных графиков в двойных логарифмических координатах) возможно, могли бы быть использованы впоследствии (при уточнении соответствующего подхода) как метод прогнозной оценки объемов еще не открытых месторождений в плохо исследованных регионах (ранее аналогичный метод уже использовался для прогноза числа УВ месторождений разного ранга).

ГЛАВА 2. ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МЕСТОРОЖДЕНИЙ ПО ЗЕМНОМУ ШАРУ

В начале кратко описываются принципы подсчета фрактальной размерности и опыт их применения в геофизических исследованиях. Разобраны модельные примеры распределения гипотетических месторождений, на которых показана методика подсчета фрактальной размерности. Вводится понятие «смешанной фрактальной размерности». Ведется подсчет фрактальной размерности распределения реальных рудных месторождений по сферической поверхности Земли.

2.1 Дробная размерность

Формулы объемов n -мерных тел, которые главным образом зависят от n , служат предпосылкой для введения дробных размерностей. Рассмотрим некоторые примеры.

Объем n -мерного куба $V = L^n$, $n \in \mathbb{N}$. Для евклидовых пространств n принимает только неотрицательные целые значения. Эта формула легко обобщается на другие случаи. Для пространств, задаваемых фрактальными множествами n может принимать вещественные неотрицательные значения, при этом $V = L^D$, где $D \in \mathbb{R}^+$ (вещественное число).

Подобное обобщение делается и для шара [Кроновер, 2000], определить объем шара можно как:

$$V_{\text{шара}} = r^D \gamma(D), \quad (2.1)$$

где $\gamma(D)$ выражается через Гамма-функцию.

2.1.1 Размерность Минковского

Рассмотренное обобщение может быть использовано для обобщения размерности компактного множества $A \subset \mathbb{R}^n$. Приведем краткое определение. Для этого аппроксимируем A объединением шаров и просуммируем их объемы (или меры в общем случае).

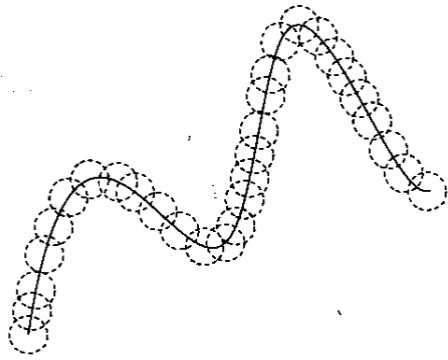


Рисунок 2.1 – Размерность Минковского

Пусть $N(\varepsilon)$ — минимальное число шаров радиуса ε , необходимых для покрытия компактного множества A . Их суммарный объем V пропорционален $N(\varepsilon)\varepsilon^D$. При $\varepsilon \rightarrow 0$, $N(\varepsilon) \rightarrow \text{const} / \varepsilon^D$. Логарифмируем и получаем $\ln N(\varepsilon) \rightarrow \ln \text{const} - D \ln(\varepsilon)$

$$\frac{\ln \text{const} - \ln N(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \longrightarrow D \quad (2.2)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ значение $\ln(\text{const})$ пренебрежимо мало по сравнению с $\ln N(\varepsilon)$. Приходим к определению размерности Минковского

$$\dim_M(A) = D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(\varepsilon)} \quad (2.3)$$

Отдельно можно доказать, что если изменить метрику, то могут быть использованы кубы вместо шаров.

2.1.2 Размерность Хаусдорфа-Безиковича

Размерность Хаусдорфа-Безиковича схожа с размерностью Минковского и согласуется с нашими обычными представлениями о размерности. Ее отличие заключается в том, что шары берутся произвольного радиуса $0 < r \leq \varepsilon$ и множество не обязательно должно быть компактным.

Согласно определению по [Кроновер, 2000]: пусть A является произвольным множеством $A \subset \mathbf{R}^n$. Рассмотрим последовательность шаров $r_i < \varepsilon$, $i=1,2,3,\dots$, которые покрывают A .

Используя обобщенную формулу объема (или меры в общем случае) шара запишем:

$$S_{d,\varepsilon}(A) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \gamma(d)r_i^d \quad (2.4)$$

Доказательство существования единственного вещественного числа d , для которого $S \neq 0$ и $S \neq \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ провел Феликс Хаусдорф, а вклад в строгое доказательство теоремы внес Абрам Безикович, поэтому размерность d называется размерность Хаусдорфа-Безиковича, и обозначается как $\dim_H(A)$.

2.1.3 Вычисление размерности Минковского с помощью ЭВМ

Широко распространенный практический прием определения размерности является клеточный метод. В покрывающем множестве количество кубов N от длины грани куба ε при малых ε пропорционально согласно следующему соотношению:

$$\ln const - \ln N(\varepsilon) \approx d \ln(\varepsilon) \quad (2.5)$$

В графическом представлении это означает, что зависимость $\ln N$ от $\ln \varepsilon$ будет прямой линией с наклоном равным d . Такая методика расчета применима не только для вычисления размерности Минковского, но и Хаусдорфа, хотя для некоторых множеств (например, для счетных множеств) эти размерности, вычисленные аналитически, могут отличаться.

Приведем простой пример – анализ изображений. На рисунке 2.2 представлены стадии вычисления размерности Миньковского.

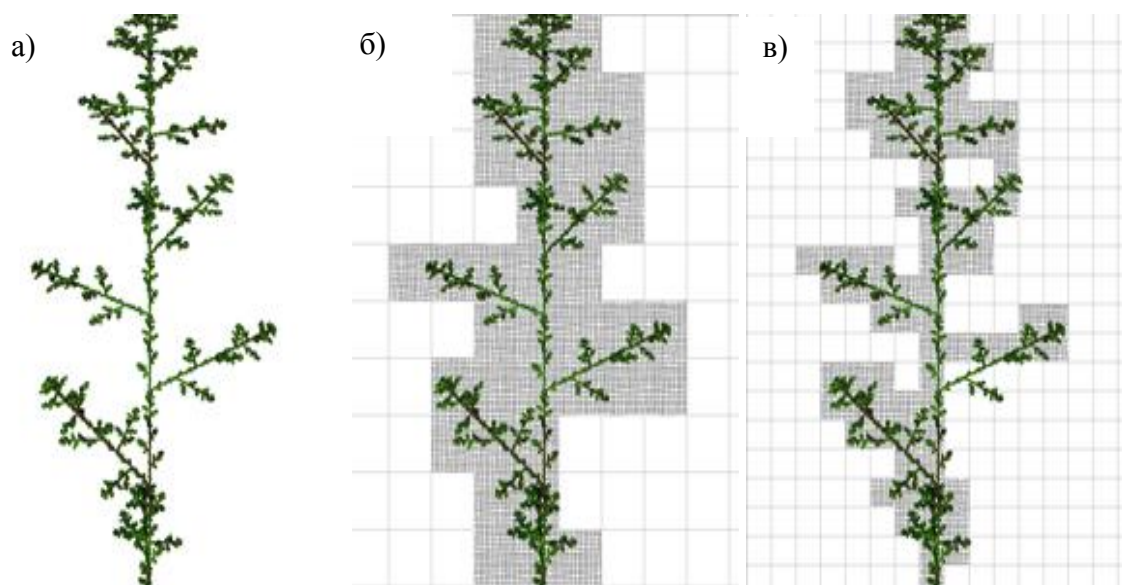


Рисунок 2.2 – Алгоритм вычисления размерности Миньковского: а - исходное изображение; б - итерация 1 ($N_1 \varepsilon_1$); в - итерация 2 ($N_2 \varepsilon_2$)

На исходное изображение (2.2а) накладывается некая сетка ячеек, последовательно (2.2б) и (2.2в), увеличивая их количество с уменьшением линейных размеров сетки. Записывая последовательно результат количества ячеек N для разных ε в таблицу 2.1, строится график зависимости $\ln(N)$ от $\ln(\varepsilon)$ (рисунок 2.3).

Таблица 2.1 – Определение размерности

ε	1	2	3	4	5	6	7	8
N	917	354	206	141	102	82	66	56

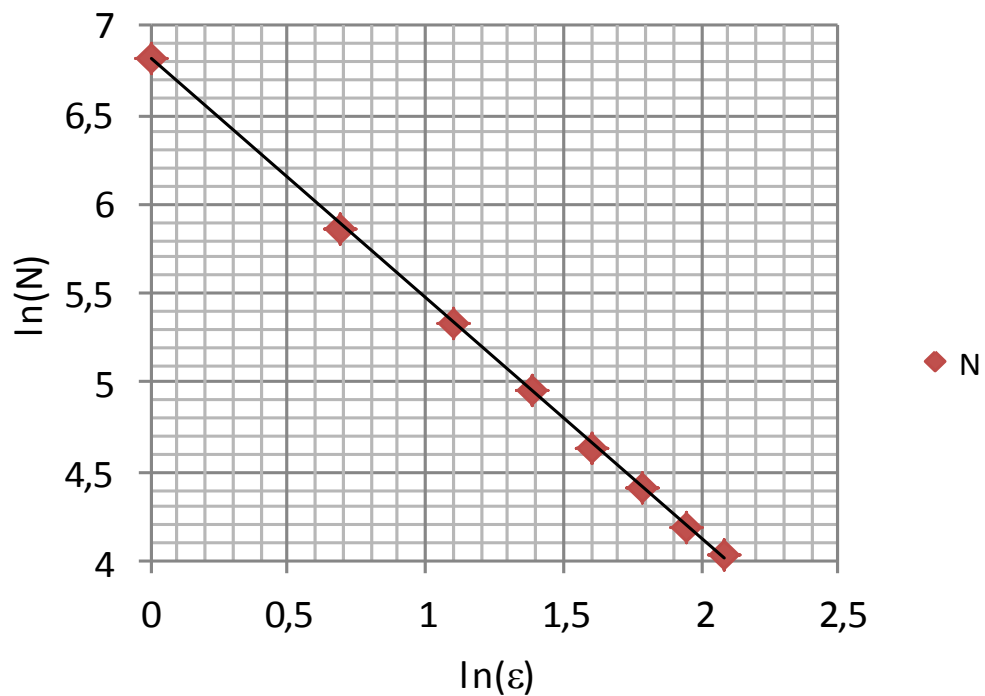


Рисунок 2.3 – График определения размерности

Построенный график (рисунок 2.3) не является прямой в строгом понимании и поэтому его наклон $d=1.346$ вычислен методом наименьших квадратов, чему и равна вычисленная размерность.

Существует и некоторый недостаток используемого метода, заключающийся в том, что для вычисления размерности необходимо использовать минимальное покрытие, однако поиск такого покрытия является порой сложной задачей. Более того, вычисления могут оказаться огромными при незначительном увеличении точности определения покрытия. Графически

такое поведение можно увидеть на рисунке 2.4, где показан ступенчатый график определения размерности.

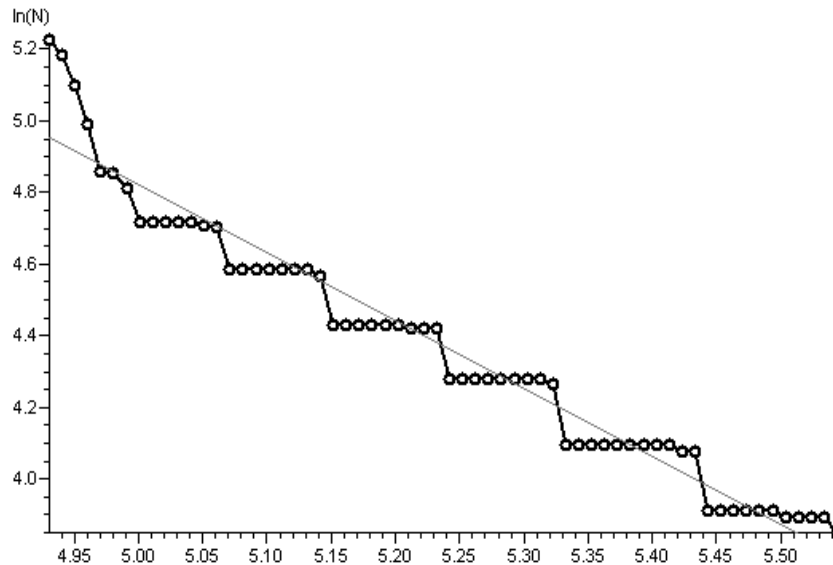


Рисунок 2.4 – Ступенчатый график определения размерности

Такой эффект зависит от алгоритма используемого для расчета размерности и проявляется для всех типов фракталов, при плавном изменении ε между итерациями. Приведенный пример использует изменение между соседними итерациями для ε , равное 1%.

Ограничения для ε в рамках клеточных моделей $l \geq \varepsilon \geq L$ строже, чем для векторных, где $0 < \varepsilon \geq L$. Фактически, на практике (при вычислении на компьютере) это означает, что точность вычислений ограничена лишь возможностями машины: точность будет зависеть от того, насколько малое положительное значение ε можно использовать для расчетов. Существует также некоторое ограничение, которое характерно для некоторых физических объектов и моделей, состоящих из конечного количества векторных объектов: начиная с момента, когда ε становится намного меньше размера любого объекта, наклон графика становится равным топологической размерности объектов. В таком случае, задача исследователя состоит в том, чтобы выбрать некоторый имеющий физический смысл диапазон значений для ε . Часто это решается введением некоторого значения $l \geq \varepsilon \geq L$, где δ – средняя длина объектов, составляющих множество, а L – размер всего ансамбля. Для разных объектов выбор таких ограничений на ε каждый раз уникален.

Еще один схожий с клеточным методом – точечный метод. Пусть весь фрактал покрывает некоторая сетка, узлами ее будут ячейки: те ячейки, которые имеют непустое

пересечение с фракталом, примем за одну точку [Voss, 1985]. Подобным образом выводится на экран изображение (в том числе и фрактала) как массив пикселей. Таким образом, вычисление количества точек в клетке равносильно подсчету числа ячеек, в то время как с формальной геометрической точки зрения, количество точек бесконечно велико. Принципиальное отличие точечного метода от клеточного состоит в объектах подсчета. В первом случае подсчитывают количество точек в клетке, во втором – количество клеток, необходимое для покрытия фрактала. В простом случае клетки можно принять квадратными, число ячеек каждой стороны – L будет определять размер клетки. Рассмотрим случай нечетных значений L , при котором центральная ячейка клетки равноудалена от всех сторон. Вероятность $P(m,L)$ того, что клетка размера L содержит m ячеек фрактала можно рассчитать следующим образом: построим клетку размера L вокруг каждой точки фрактала, считая ее центральной и подсчитаем число попавших в нее точек (при условии, что общее число точек фрактала – M). $P(m,L)$ будет равно числу клеток содержащих m точек, где $m=1,\dots,M$, деленному на M . Поскольку сумма всех вероятностей равна 1, запишем:

$$\sum_{m=1}^M P(m, L) = 1 \quad (2.6)$$

Выше при рассмотрении клеточного алгоритма, мы принимали $N(L)$ как число клеток размера L , необходимых для покрытия фрактала. Число клеток размера L , содержащих m точек, равно $(M/m)P(m,L)$. Поэтому оценка числа клеток, покрывающих все изображение, равна

$$\langle N(L) \rangle = \sum_{m=1}^K (M/m)P(m, L) = M \sum_{m=1}^K (1/m)P(m, L), \quad (2.7)$$

где K — возможное число точек в клетке. Отсюда,

$$\tilde{N}(L) = \sum_{m=1}^K (1/m)P(m, L) \quad (2.8)$$

также пропорционально L и может быть использовано для оценки фрактальной размерности d .

Приведенные два метода являются основными для оценки фрактальной размерности. Список может быть расширен измерениями по физическим свойствам [Циллис, 1988].

2.1.4 Мультифракталы и обобщенные размерности Реньи d_q

Перейдем к рассмотрению мультифракталов. Пусть фрактальный объект занимает некую ограниченную область A , с размерностью $\dim(A) = L$ в евклидовом n -мерном пространстве. На произвольно выбранном этапе построения он является множеством точек $N \gg 1$, распределенных некоторым способом на этой области A , предположим, что $N \rightarrow \infty$.

Множество точек N распределенных по области A может быть популяция, например, некоторого биологического вида или распределение дефектов кристаллической решетки – примеров можно привести гораздо больше. Такое распределение остается неравномерным вне зависимости от изучаемого масштаба.

Область A подвергнем разбиению на гиперкубические ячейки, сторона ячейки равна ε и объем равен ε^d . Число ячеек, содержащих хотя бы одну точку обозначим как N , их число очевидно зависит от ε . Обозначив $n_i(\varepsilon)$ – число точек в i -й ячейке, имеем выражение для вероятности $p_i(\varepsilon)$ того, что некоторая ячейка содержится в i -м кубе:

$$p_i(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_i(\varepsilon)}{N} \quad (2.9)$$

Полученная вероятность характеризует относительную заселенность ячейки. При условии нормировки вероятностей:

$$\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i(\varepsilon) = 1 \quad (2.10)$$

Нам потребуется ввести обобщенную статистическую сумму, параметр, зависящий от q :

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon) \quad (2.11)$$

q принимает значения $-\infty \leq q \leq +\infty$

Совокупность величин d_q характеризующих распределение точек в области A , называется спектром обобщенных фрактальных размерностей Реньи и выражается как:

$$d_q = \frac{\tau(q)}{q-1}, \quad (2.12)$$

где:

$$\tau(q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln Z(q, \varepsilon)}{\ln \varepsilon} \quad (2.13)$$

В случае обычного однородного фрактала, когда зависимость $\tau(q) = (q-1)d$ линейна, иными словами $d_q = const$ (не зависит от q), эти размерности совпадают и фрактал может быть охарактеризован только одной величиной d_H – фрактальной размерностью. Такой фрактал называют *монофрактал*. Другой случай, когда d_q зависит от q , такой фрактал называется *мультифрактал* и его можно охарактеризовать нелинейной функцией $\tau(q)$ определяющей поведение статистической суммы $Z(q, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon) \approx \varepsilon^{\tau(q)} \quad (2.14)$$

Предельному переходу при $\varepsilon \rightarrow 0$ предшествует предел $N \rightarrow 0$.

Для характеристики мультифрактала потребуется набор, в общем случае бесконечный, обобщенных размерностей d_q . Существуют иные подходы к измерению размерности [Havlin, 1984; Федер, 1991].

2.1.5 Фрактальная размерность D_0

Рассмотрим частный случай обобщенных фрактальных размерностей d_q , когда q принимает значение 0 [Божокин, 2001]. Воспользуемся уравнением (2.11):

$$Z(0, \varepsilon) = N(\varepsilon) \quad (2.15)$$

И, воспользовавшись:

$$Z(0, \varepsilon) \approx \varepsilon^{\tau(0)} = \varepsilon^{-d_0} \quad (2.16)$$

Получаем что $N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-d_0}$. Размерность хаусдорфа d_0 множества A будет достаточно грубой характеристикой мультифрактала.

2.1.6 Информационная размерность D_1

Другой пример определенных значений: $Z(1, \varepsilon) = 1$ и $\tau(1) = 0$ получаем:

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \cdot \exp[(q-1) \ln p_i] \quad (2.17)$$

При $q \rightarrow 1$, раскладывая экспоненту и учитывая условие нормировки, получаем:

$$Z(q \rightarrow 1, \varepsilon) \approx \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} [p_i + (q-1)p_i \ln p_i] = 1 + (q-1) \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \ln p_i \quad (2.18)$$

В итоге выражение для d_1 :

$$d_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \ln p_i}{\ln \varepsilon} \quad (2.19)$$

Приведем выражение для энтропии фрактального множества:

$$S(\varepsilon) = - \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \ln p_i \quad (2.20)$$

Они совпадают с точностью до знака. В термодинамике используется то же выражение для энтропии, только p_i означает вероятность обнаружить систему в квантовом состоянии i . И обобщенная фрактальная размерность D_1 связана с энтропией соотношением

$$d_1 = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \quad \text{или} \quad S(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-d_1} \quad (2.21)$$

Классическое термодинамическое определение энтропии как меры хаоса в данном случае можно рассмотреть с точки зрения фрактальной размерности: D_1 называют информационной размерностью и она характеризует информацию, необходимую для определения местоположения точки в некоторой ячейке. Эта величина возрастает, как возрастает и информация необходимая для определения координат точки при стремлении размера ячейки ε к нулю.

2.1.7 Корреляционная размерность D_2

Для выражения суммы Z введем корреляционный интеграл $I(\varepsilon)$. Рассмотрим вероятность сонахождения двух случайным образом выбранных точек множества A в одной ячейке. Размер ячейки, как и ранее, положим ε :

$$I(\varepsilon) \approx \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^2 \approx \varepsilon^{d_2} \quad (2.22)$$

Название корреляционная размерность для D_2 используется потому, что в полученном выражении показывает зависимость корреляционного интеграла $I(\varepsilon)$ от ε . Эта размерность будет использована в предлагаемой работе.

2.2 Опыт применения фрактальной размерности в геофизике

Цитируя классика [Mandelbrot, 1982]: «Если Вам не надо знать, чем отличается одна поверхность от другой, накройте их фольгой и для обеих получите топологическую размерность 2, как для любых поверхностей. Но если Вы хотите сравнить их по структуре обработки, пористости и пр., то без фрактальной размерности вам не обойтись. Евклидова геометрия не в состоянии различать узоры береговых линий – для всех континентов в таком случае их размерность будет равна единице». Однако в самых ранних классических работах понятие фрактальной размерности использовалось в основном для описания рукотворных фракталов. Таких, как ковер Серпинского, кривая Коха, таким образом, теория фракталов была вещью в себе. В последующие годы начало появляться все больше публикаций, показывающих применение этой теории к описанию объектов живой и неживой природы.

Современные исследования геофизических объектов основываются на вполне подробных базах данных (в их числе, например, описанная ГИС КСКМ). Это позволяет применять методы, отраженные выше [Крылов, 2004]. Так, для исследования параметров пространственного расположения локальных объектов часто используют методы, опирающиеся на расчет фрактальной размерности. Расчет корреляционной размерности является одним из приоритетных методов для анализа точечных объектов [Hentschet, 1983]. В случае сейсмичности, такой подход позволяет выявить приуроченность очагов землетрясений к квазилинейным, двумерным или объемным сейсмогенным структурам. Исследование пространственно-временных изменений пространственного распределения землетрясений помогает выявить, например, тенденцию растущей пространственной локализации очагов (отвечающей уменьшению фрактальной размерности множества гипоцентров), что иногда используется как признак подготовки сильного землетрясения. Существуют методики исследования УВ-бассейнов методами фрактального анализа [Запивалов, 1995; *Fractals in petroleum..*, 1995; Особенности гидродинамического..., 2013]. Причем, исследование фрактальной размерности проводятся не только на поверхности, но и в толще пород и позволяет выявить характеристические границы между состояниями среды осадконакопления [Нурғалиева, 2007]. Есть и другие опыты применения понятия фрактальной размерности к объектам природы [Утёмов, 1998]. В современных математических программных пакетах, таких как MatLab существуют отдельные функции, которые упрощают расчет фрактальной размерности объектов, которые представлены в виде изображений и не переведены в «цифровой вариант» [Trauth, 2015].

Важно подчеркнуть, что расчеты фрактальной размерности D реальных физических систем в определенной мере условны [Molchan, 2009]. В отличие от идеальных математических фракталов, в природе наблюдается, как правило, только довольно небольшой интервал масштабов (часто даже менее одного порядка величины), на котором выполняется самоподобие исследуемых объектов, и график, используемый для определения фрактальной размерности, остается достаточно прямолинейным, что бы по нему можно было оценить его наклон и величину фрактальной размерности. При этом участков прямолинейного поведения графика может быть несколько, в этих случаях допустимо получение разных значений фрактальной размерности на разных пространственных масштабах. Ниже будут приведены примеры, иллюстрирующие полезность такого подхода.

Непосредственный расчет корреляционной размерности производится следующим образом: строится график, числа пар $N(r)$ объектов, расположенных на расстоянии не более r км друг от друга, и определяется наклон β прямолинейного участка графика (если таковой имеется)

$$N(r) \sim r^\beta \quad (2.22)$$

в двойных логарифмических координатах:

$$\lg N(r) \sim \beta \lg(r) \quad (2.23)$$

В данном случае, объектами исследования являются месторождения. Расстояния рассчитываются как наименьшее расстояние на сферической поверхности.

Параметр β фактически показывает искомую размерность. Далее на модельных примерах будет показано, что если исследуемые объекты равномерно распределены вдоль прямой (например, разлома), то показатель β близок к единице; если они равномерно распределены по площади, то β близко к двум. Обычно выбирается наиболее протяженный прямолинейный участок графика, и по нему определяется значение β . Но как уже отмечалось выше, довольно часто имеется несколько почти прямолинейных участков графика $\lg(N(r))$ от $\lg(r)$; в этом случае можно определить несколько значений корреляционной фрактальной размерности D_2 , отвечающих разным пространственным масштабам. В некоторых случаях такие оценки оказываются полезными.

2.2.1 Моделирование распределений месторождений

Согласно высказанным соображениям в предыдущей главе мы будем использовать метод расчета корреляционной размерности D_2 . Воспользуемся простым методом определения фрактальной размерности, через подсчет наклона накопительного графика в двойных логарифмических координатах на квазипрямолинейных участках. На модельных примерах попробуем изобразить общие тенденции распределения реальных месторождений и покажем взаимосвязь между параметрами распределения гипотетических месторождений и результатами определения корреляционной размерности на разных масштабах. Мы будем использовать функции `rand()` и `randn()` пакета `MatLab` для получения нормального распределения с заданными параметрами. В начале каждого параграфа мы будем показывать параметры, которые заложены в модель, чтобы их можно было сравнить с результатами определения корреляционной размерности. В первом примере подробно распишем наши действия.

Модель: *очаги рудообразования распределены вдоль прямой.* Расположим на плоскости вдоль одной произвольной прямой некие центры скопления будущих гипотетических месторождений, назовем их очагами рудообразования. Как уже было отмечено, воспользуемся функцией `rand` пакета `MatLab`. Функция `rand()` формирует массив случайных величин, распределенных по равномерному закону в интервале (0, 1). Более подробно алгоритм генерации равномерно распределенных случайных чисел описан в работе [Park, 1988]. Участок кода построения прямой выглядит следующим образом:

$$\text{for } i=1:10; x(i)=50*\text{rand}; y(i)=2*x(i)+10; \quad (2.24)$$

такое построение подразумевает размер модельной области от 0 до 50 условных единиц по оси абсцисс и от 0 до 100 по оси ординат. Для приведения модельной области к аналогии с рассматриваемыми в работе реальными картами можно назвать эти оси условными широтой и долготой, однако, с некоторой оговоркой. В данном случае, модельная поверхность не является поверхностью шара и представляет собой привычную плоскую фигуру (прямоугольник). Это сделано для простоты расчета расстояний между гипотетическими месторождениями. В случае если рассматривается поверхность эллипсоида (такое приближение используется для распределения реальных данных ГИС КСКМ), расчет расстояния производится с учетом этого приближения поверхности земли. Итак, очаги распределены на прямой в соответствии с равномерным случайным распределением и центры очагов отмечены на рисунке 2.5 кружками. Для генерации распределения гипотетических

месторождений около выбранных очагов, воспользуемся функцией $\text{randn}(n)$, которая формирует массив размера $n \times n$ элементов, которые являются случайными величинами, распределенные по нормальному закону с математическим ожиданием 0 и среднеквадратическим отклонением 1. Подробнее этот алгоритм описан в [Forsythe, 1977]. Пусть месторождения будут распределены вокруг каждого центра случайно с радиусом, который будет задаваться нормальным распределением с параметром равным 1. Количество гипотетических месторождений также будет случайным, равномерным (задается функцией $\text{rand}()$, как и количество самих центров) в пределах 0 - 10.

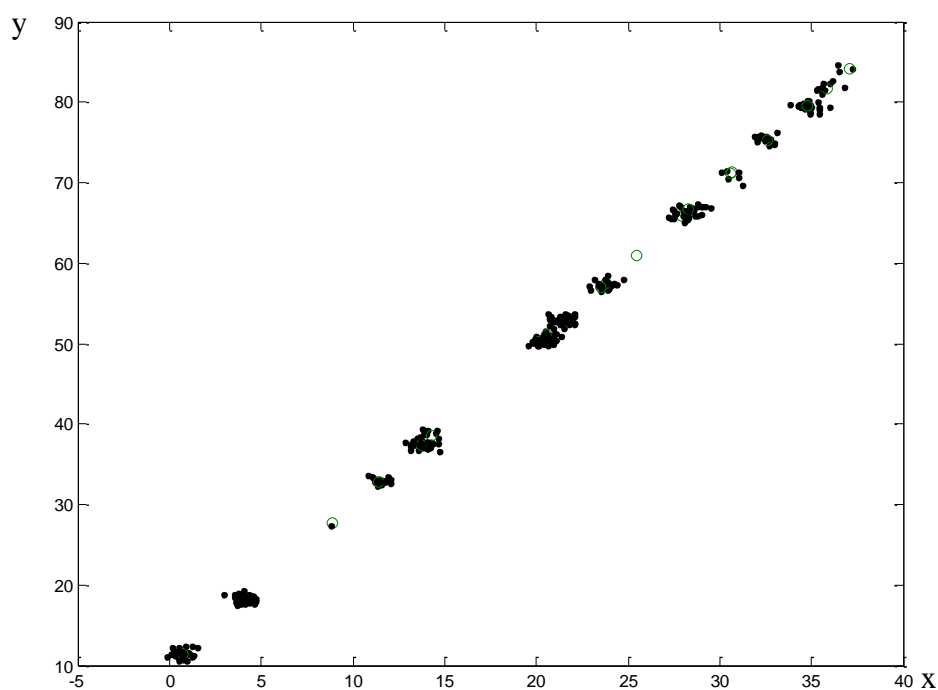


Рисунок 2.5 – Модельное распределение гипотетических месторождений (точки) и очагов их образования (кружки) на плоскости вдоль прямой. По осям x и y – модельные расстояния, условные единицы

Проанализируем эту модель распределения месторождений вокруг неких центров с точки зрения фрактальной размерности (а именно, корреляционной размерности D_2). Для этого, рассчитаем все возможные расстояния между гипотетическими месторождениями на плоскости и построим график, на оси абсцисс которого расположим полученные расстояния, а по оси ординат – количество месторождений, находящихся друг от друга на расстоянии не более данного. Такие графики принято называть накопительными. В двойных

логарифмических координатах мы обнаруживаем два квазипрямолинейных участка с наклонами равными 2 и 1 (рисунок 2.6). Наклоны графиков, согласно соотношению (2.22 и 2.23), являются искомыми размерностями.

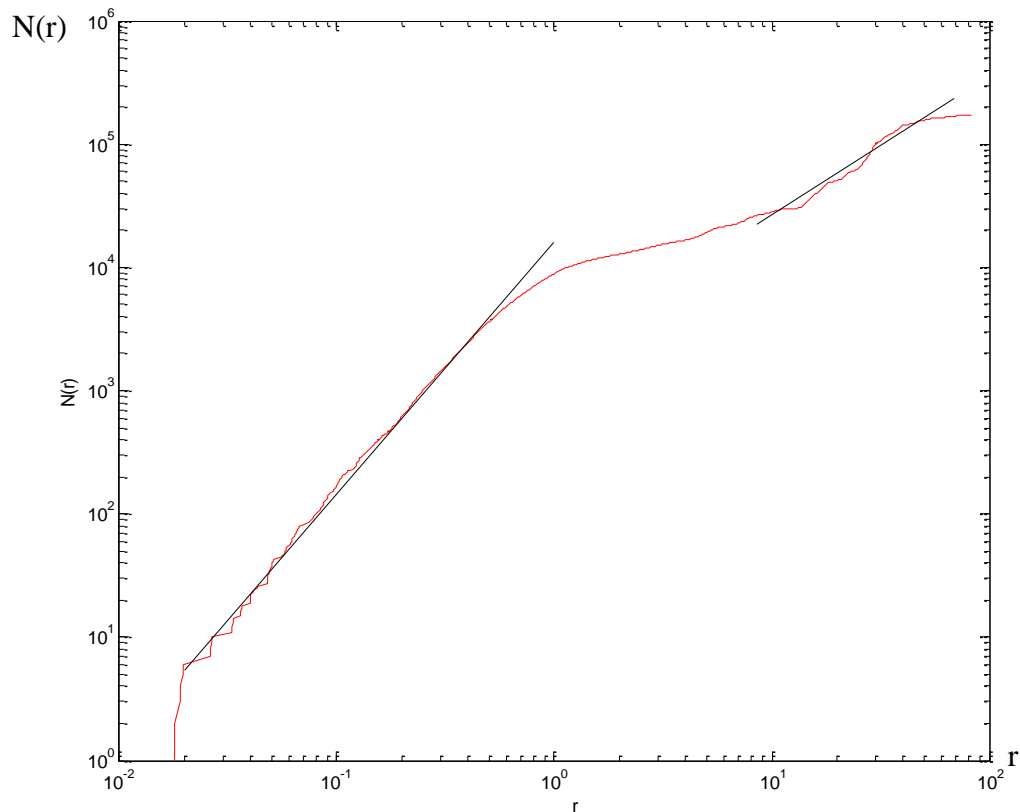


Рисунок 2.6 – Накопительный график модели распределения очагов образования месторождений вдоль прямой. $N(r)$ – количество элементов исследуемого множества с расстоянием между элементами не менее r

Остановимся на этом подробнее: наличие двух квазипрямолинейных участков с явно определяемыми наклонами говорит о наличии двух масштабов, на которых можно с приемлемой точностью охарактеризовать величину фрактальной размерности. Вернемся к построению модели: действительно, в модель были заложены два масштаба, на которых были использованы разные параметры распределения. Гипотетические очаги рудообразования распределены вдоль прямой, со средним расстоянием между очагами 10 условных единиц, что соответствует наклону равному единице на накопительном графике (рисунок 2.6). Этот масштаб наблюдается на оси расстояний, где график сохраняет наклон равный 1: в диапазоне

от 10 до 50 условных единиц расстояния. Наклон начального участка графика равен 2, что соответствует тому факту, что точки были равномерно распределены на плоскости вокруг гипотетических центров (размерность плоскости равна 2). Масштаб, на котором проявляется размерность $D_2=2$, здесь наблюдается с самого начала графика: от 10^{-2} до 10^0 условных единиц расстояния. Этот масштаб задавался в самой модели, когда месторождения располагались вокруг центров рудообразования случайно с радиусом, который задавался нормальным распределением с параметром равным 1. Эта разница масштабов достаточно хорошо видна на рисунке 2.5: точками показаны месторождения, расстояния между которыми на порядок меньше расстояний между очагами рудообразования (показаны кружками)

То есть, резюмируя наше исследование первого модельного примера, можно сказать, что на накопительном графике в двойных логарифмических координатах выделяются два участка и промежуток между ними. Масштабы участков равны 0-1 и 10-50 условных единиц. Угол наклона прямолинейных участков равен 2 и 1. Иными словами, на малых масштабах построенное распределение соответствует нормальному распределению на плоскости, а на больших масштабах обнаруживается нормальное распределение кластеров гипотетических месторождений вдоль некоторой линии (в частном случае, прямой), что и было изначально задано в законе распределения для месторождений в этом модельном примере. Промежуток между линейными областями, где число пар объектов нарастает с увеличением расстояния весьма медленно, соответствует интервалу масштабов между характерной длиной линейных скоплений и средним расстоянием между соседними скоплениями.

Модель: очаги рудообразования распределены на плоскости. Построим другую модель, когда очаги расположены случайно на плоскости (рисунок 2.7), а закон распределения гипотетических месторождений остался прежним (они распределены по нормальному закону с параметром 1 вокруг очагов рудообразования). Теперь накопительный график в двойных логарифмических координатах (рисунок 2.8) обнаруживает два квазипрямолинейных участка, наклон которых в обоих случаях равен двум. Теперь, говоря о фрактальной размерности второй исследуемой модели мы можем сказать, что на обоих масштабах она равна 2, что отвечает равномерному распределению гипотетических месторождений на плоскости в масштабе до 1 условного расстояния и в промежутке 10~50 условных единиц расстояния.

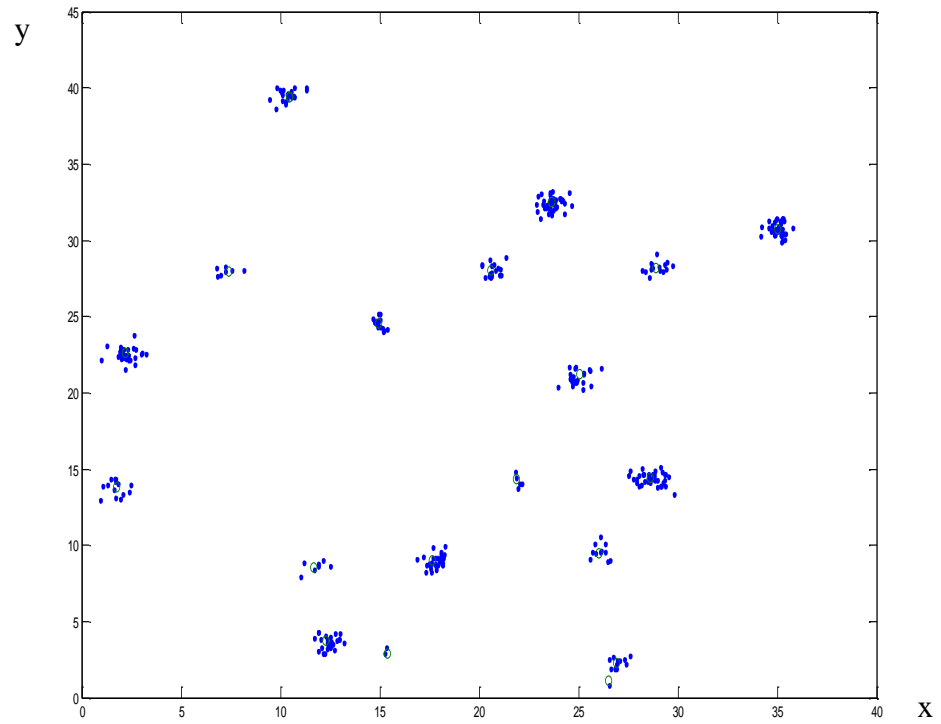


Рисунок 2.7 – Модель распределения. По осям x и y – расстояния, условные единицы

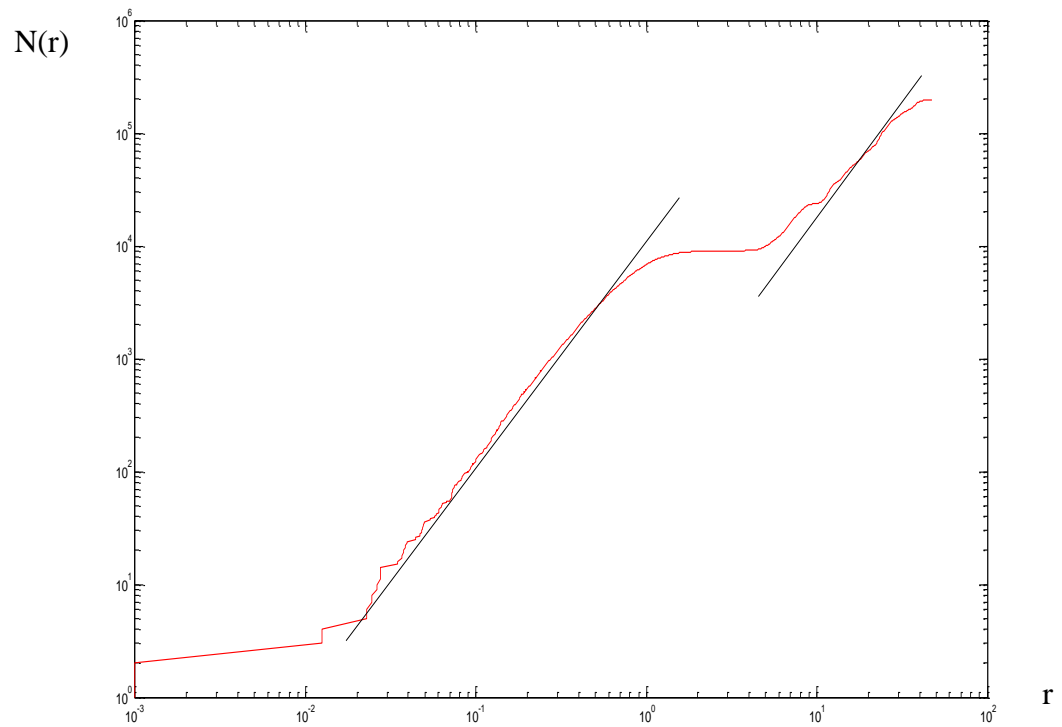


Рисунок 2.8 – Накопительный график модели распределения очагов образования месторождений вдоль прямой. $N(r)$ – количество элементов исследуемого множества с расстоянием между элементами не менее r

Можно и дальше продолжать описывать эксперименты в области моделирования, затронув так же объемные модели: показанные зависимости сохраняются и там.

Модель: два типа месторождений с одинаковыми условиями образования. В предыдущих модельных примерах молчаливо подразумевалось, что гипотетические месторождения принадлежат одному типу, и никак не различаются по набору содержащихся в них элементов. Однако в самом методе определения фрактальной размерности нет ограничений на типы исследуемых объектов. Построим модельный пример, в котором будем изучать «смешанные» корреляционные размерности. Для этого, на накопительном графике построим не все расстояния, а расстояния между месторождениями, содержащими разные элементы. В качестве примера будем считать, что существует два типа месторождений: А и В.

Построим простой пример распределения таких месторождений вокруг одних и тех же очагов (рисунок 2.9) которые расположены вдоль одной прямой (аналогично первому

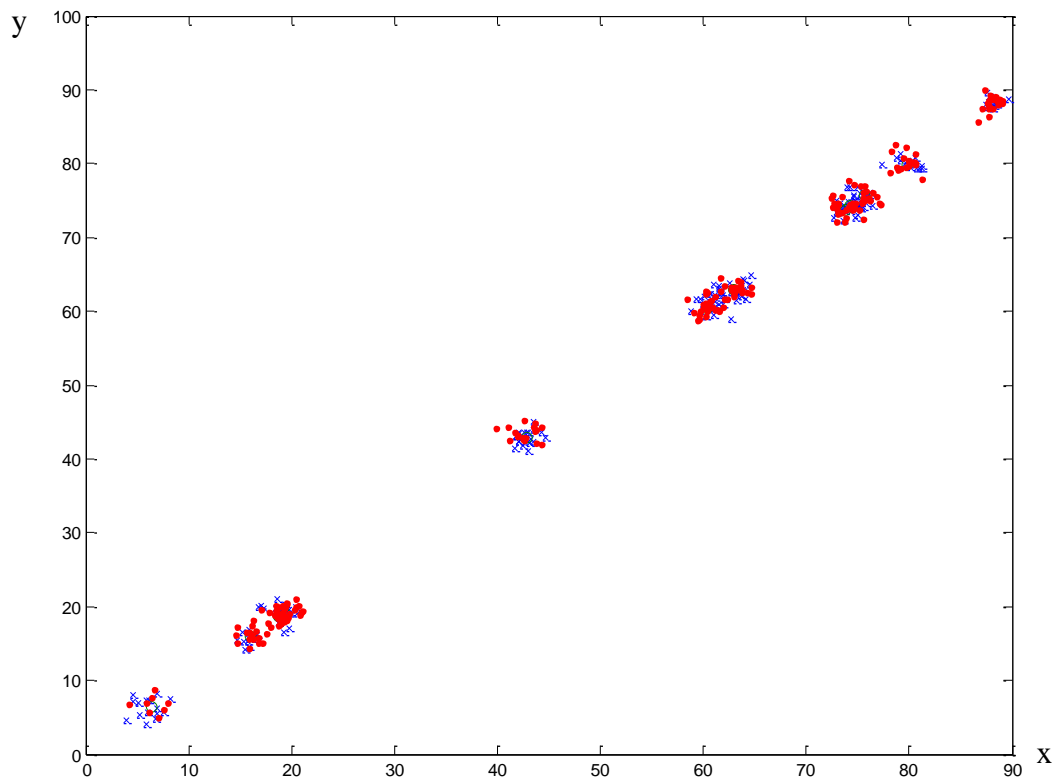


Рисунок 2.9 – Модель распределения месторождений типа А и В (точки) вокруг центров образования месторождений (кружки), расположенных вдоль одной прямой. По осям x и y – модельные расстояния, условные единицы

модельному примеру в этой главе). Будем располагать последовательно сначала месторождения типа А, затем типа В вокруг одного и того же набора очагов. На накопительном графике (рисунок 2.10), на котором теперь будут откладываться расстояния между месторождениями типа А и В, обнаруживается схожая картина: два квазипрямолинейных участка с наклонами 2 на расстояниях до одной условной единицы и квазипрямолинейный участок с наклоном равный 1 на расстояниях 10-100 условных единиц. Иными словами, на тех же масштабах обнаруживаются те же фрактальные размерности.

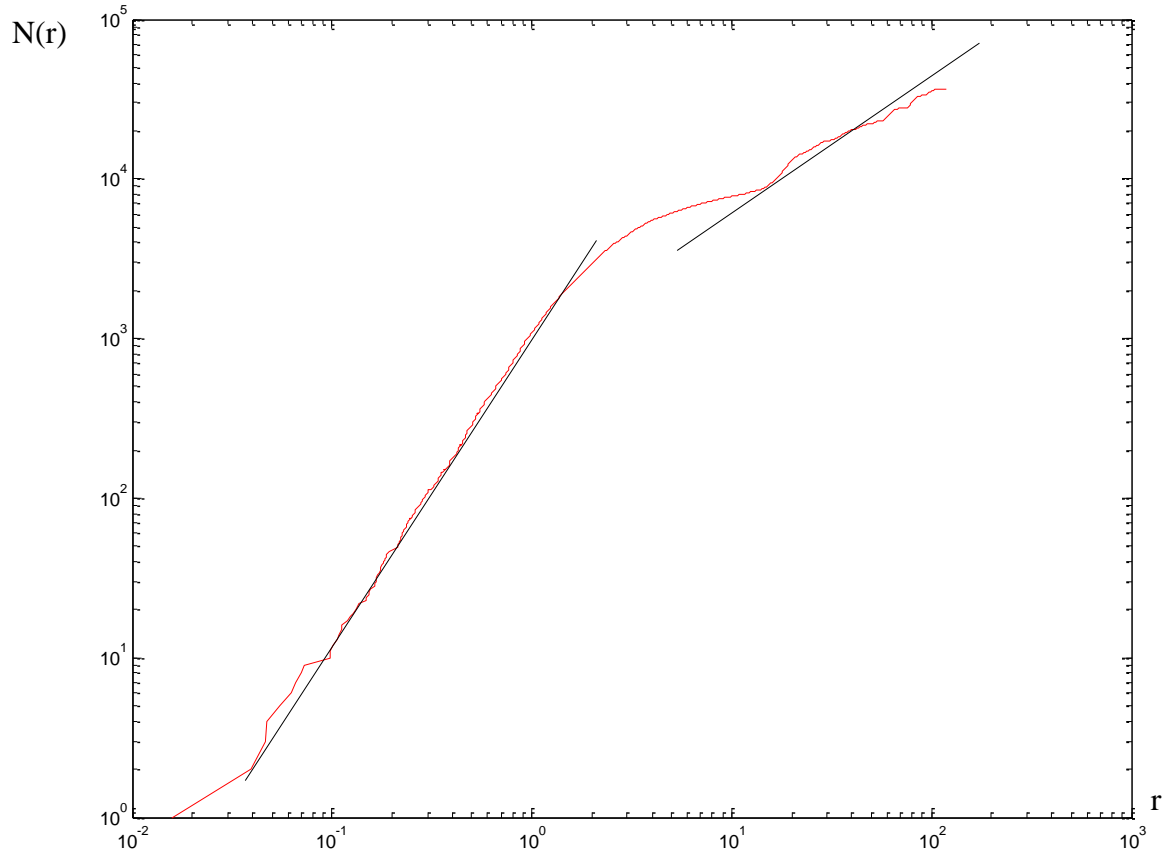


Рисунок 2.10 – Накопительный график для модели распределения месторождений типа А и В вокруг центров образования месторождений, расположенных вдоль одной прямой. $N(r)$ – количество элементов исследуемого множества с расстоянием между элементами не менее r

Как видно из графического представления модели распределения на рисунке 2.9 гипотетические месторождения А и В (как и было заложено в модели) имеют одни и те же “центры притяжения” – очаги рудообразования. С точки зрения практической геологии это означает, с одной стороны – генетическую близость элементов А и В, с другой – схожие условия образования.

Это не единственный вариант совместного распределения различных месторождений на поверхности. Усложним эту модель в следующем параграфе.

Модель: два типа месторождений с различными условиями образования. Пусть теперь точки первого вида (А) распределены по плоскости равномерно. Точки второго вида (В) сначала также расположим случайно и равномерно, а затем исключим случайным образом некоторые из точек В, причем вероятность исключения будет нарастать от 0.05 до 0.95 с уменьшением расстояния от данной точки В до ближайшей к ней точки А (рисунок 2.11).

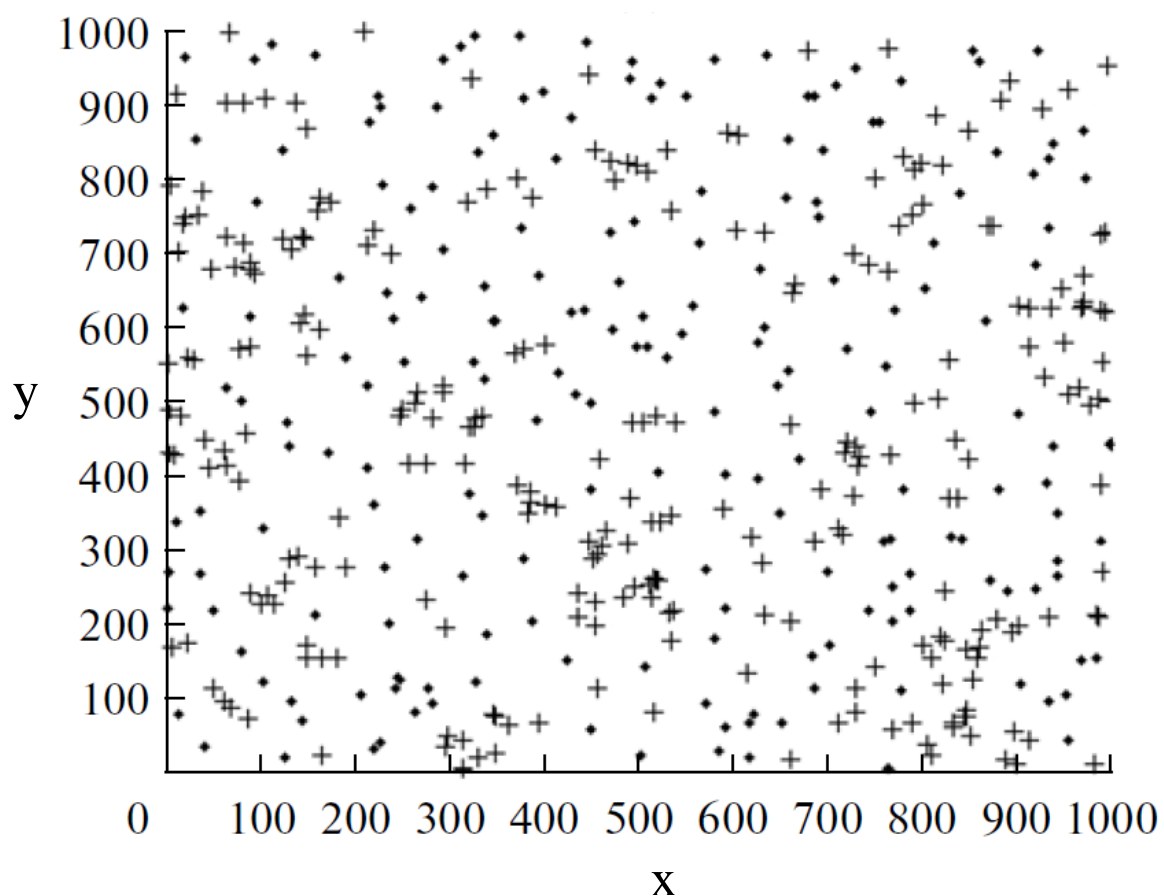


Рисунок 2.11 – Модель распределения месторождений А и В, требующих различных условий формирования. По осям x и y – модельные расстояния, условные единицы

Рассчитав для такой конфигурации значения смешанной корреляционной размерности (рисунок 2.12), получим, что в некотором интервале масштабов значение размерности намного больше двух. А именно, наклон $D > 2$ наблюдается на масштабах 50-500 единиц. Действительно, легко представить, что при расположении взаимоотталкивающихся объектов на поверхности, суммарное число пар элементов двух классов будет расти с ростом их взаимного

расстояния r быстрее, чем площадь круга πr^2 (естественно, такое поведение будет наблюдаться только в определенном довольно ограниченном диапазоне изменения величин взаимного расстояния r).

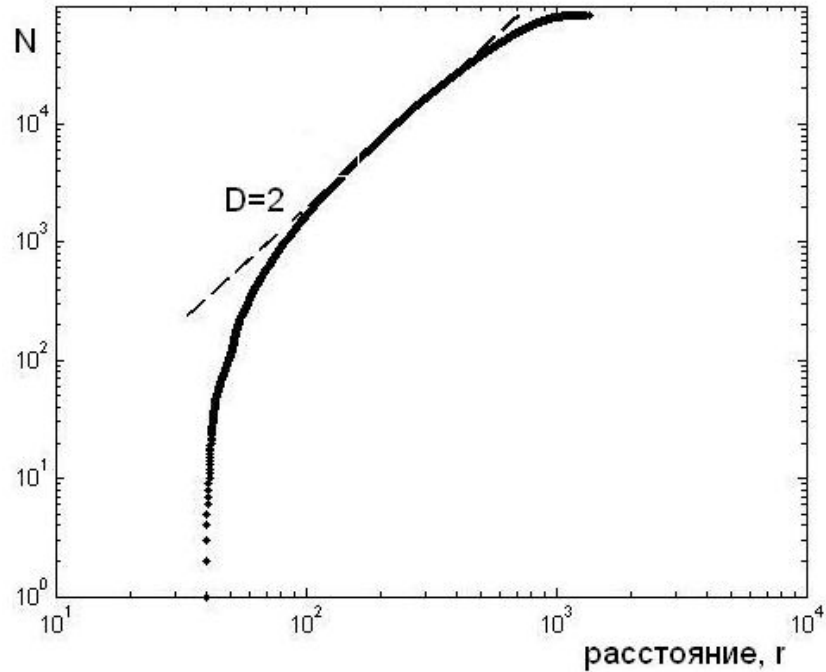


Рисунок 2.12 – Накопительный график для модели распределения месторождений А и В, требующих различных условий формирования

Полученное распределение может являться следствием как бы “взаимного отталкивания” точек А и В. С практической точки зрения, такая модель описывает распределение месторождений, требующих различных условий рудообразования. Подбирая разные параметры такой модели, можно получать различные соотношения этих “разных условий”. Для наглядного представления нам кажутся оптимальными указанные выше параметры. В случае их изменения мы увидим несколько другие характерные расстояния перегибов графика корреляционной размерности, однако общая тенденция не изменится.

Для случая реальных месторождений значения корреляционной фрактальной размерности $D_2 > 2$ будут наблюдаться тогда, когда месторождения указанных двух типов требуют для своего образования разных геолого-тектонических условий, в силу чего маловероятно их близкое расположение, а наблюдается как бы их взаимное «отталкивание»

2.3 Фрактальная размерность распределения рудных месторождений

Перейдем к описанию реальных распределений рудных месторождений, используя описанную методику.

2.3.1 Корреляционная размерность D_2

Для изучения корреляционной размерности D_2 мы будем использовать данные из уже описанной базы ГИС КСКМ. В предыдущих примерах мы использовали модели, содержащие достаточно большое количество гипотетических месторождений, однако в случае реальных распределений количество месторождений не всегда достаточно велико. В связи с этим, мы выбрали только самые распространенные компоненты рудных месторождений.

Рассмотрим несколько примеров. Месторождения Ag (рисунок 2.13) обнаруживают корреляционную размерность порядка 1.2 на всех расстояниях, и некоторый излом графика

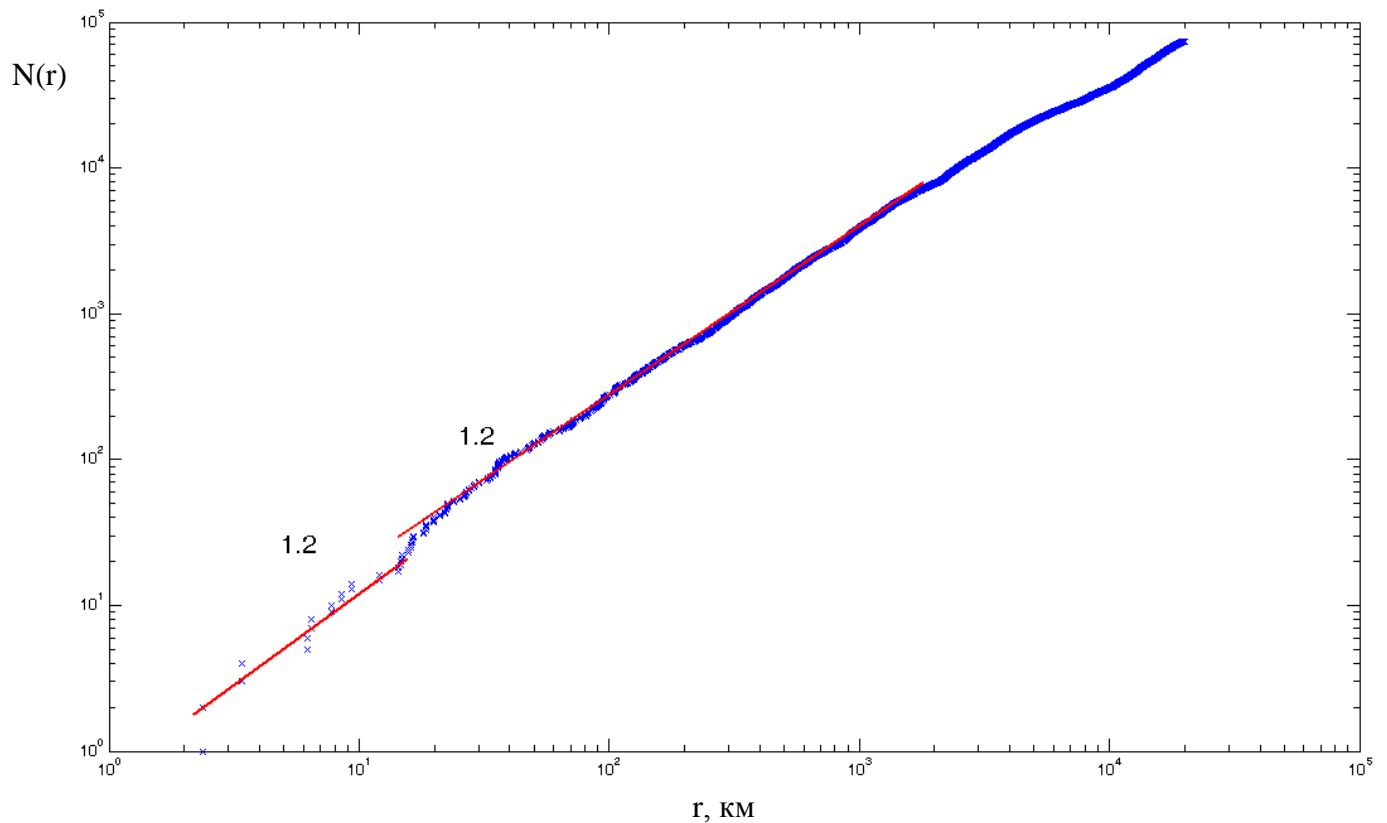


Рисунок 2.13 – Накопительный график для определения фрактальной размерности распределения месторождений, содержащих серебро

наблюдается на расстояниях 20 км, что может быть обусловлено как особенностями объединения нескольких рудных формаций в одно месторождение (фактически, размером месторождения), так и недостаточным количеством объектов изучения.

Схожая картина наблюдается при исследовании месторождений, содержащих золото, Au (рисунок 2.14). При расчете мер Танимото-Роджерса для пары Ag-Au было получено одно из наименьших значений, поэтому не удивительно, что помимо совпадения значений корреляционной размерности, совпадают также характерные расстояния, при которых происходит перелом накопительных графиков.

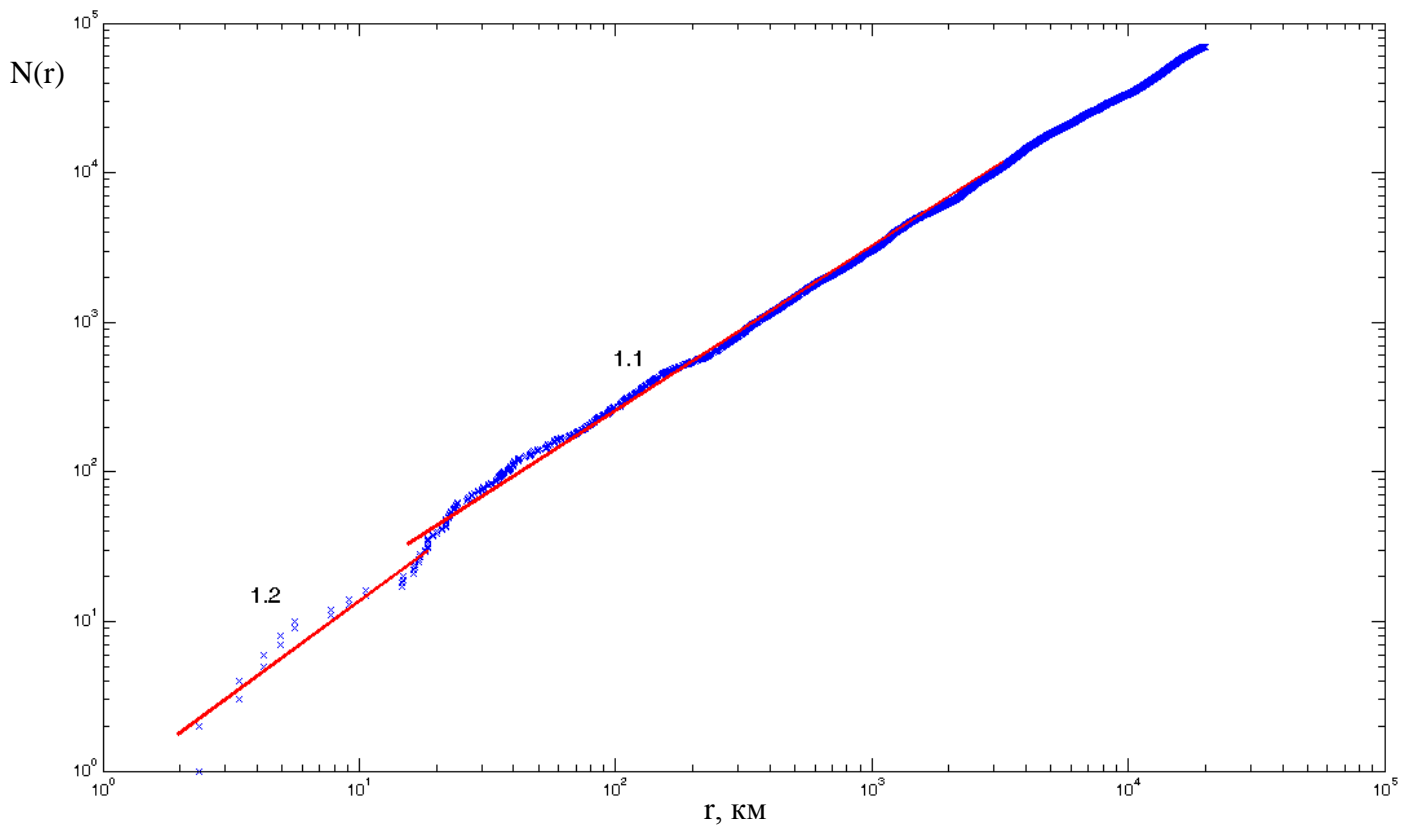


Рисунок 2.14 – Накопительный график для определения фрактальной размерности распределения месторождений, содержащих золото

Несколько иная картина наблюдается для месторождений кобальта. График для месторождений кобальта (рисунок 2.15) в целом имеет наклон меньше единицы, и на расстояниях 700-1200 км принимает значения близкие к 0.5 единиц, что говорит о приуроченности этого вида сырья к точечным скоплениям на соответствующем пространственном масштабе.

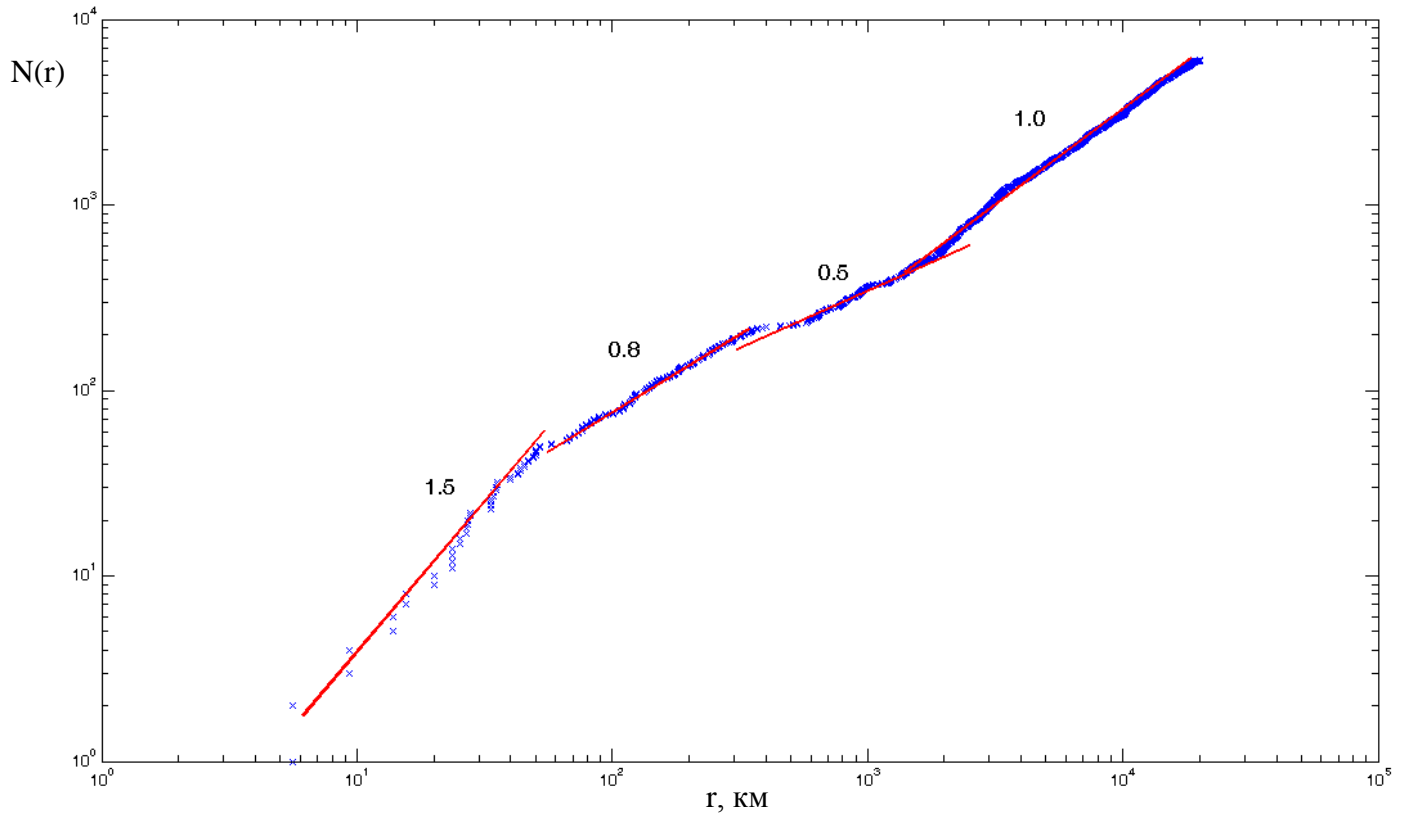


Рисунок 2.15 – Накопительный график для определения фрактальной размерности распределения месторождений, содержащих кобальт

Приведенные примеры принадлежат к группе элементов с высокой корреляционной размерностью. В целом, для рудных месторождений оказались характерны невысокие значения корреляционной размерности на небольших расстояниях и увеличение значений при переходе к большим масштабам.

Несколько особняком стоят графики для месторождений алмаза (рисунок 2.16). Одной из причин является то, что месторождений алмаза всего 40 штук в исследуемой БД, и для всей поверхности Земли этого количества оказывается мало. Тем не менее, заметны два квазипрямолинейных участка с наклоном 0.3-0.4 единиц. Как мы говорили ранее, значения близкие к нулю говорят о как-бы «точечной приуроченности» этих месторождений.

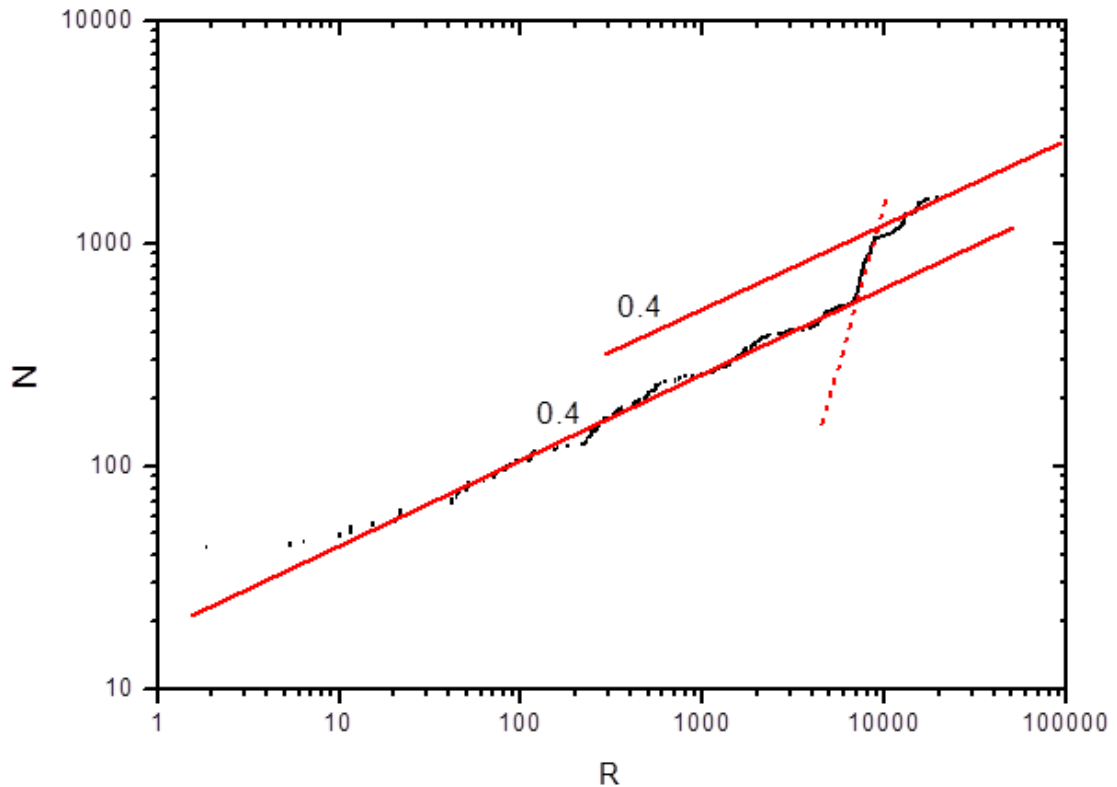


Рисунок 2.16 – Накопительный график для определения фрактальной размерности распределения месторождений, содержащих алмаз, две красные линии показывают размерность 0,4, пунктиром показана линия с наклоном больше двух

Заметим, что на больших расстояниях график зависимости (2.23) также показывает наклон около 0.3-0.4, что не характерно для рудных месторождений, которые на больших расстояниях в большинстве демонстрируют значения около 2 единиц, что в свою очередь говорит о том, что на расстояниях сопоставимых с размерами континента, рудные месторождения распределены равномерно по поверхности (но только на территории континентов, не затрагивая акваторию океанов).

2.3.2 Смешанная корреляционная размерность

Нами была поставлена задача изучения поведения накопительных графиков в двойных логарифмических координатах. Ключевым с точки зрения практического понимания фрактальной размерности рудоносных областей нам видится поведение соответствующих графиков на расстояниях 10^1 - 10^3 км. Поэтому нами были построены и проанализированы графики зависимостей распределения месторождений с одним и тем же компонентом. Однако,

в силу небольшой распространенности КСКМ, наклон графика на небольших расстояниях определяет недостаточно достоверное количество точек. Чтобы увеличить количество точек мы можем обратиться к опыту экспертной оценки и определить те элементы, которые генетически считаются связанными и фактически являются элементами из одной группы ископаемых. Таким образом, объединяя элементы в группы, например, по типу обогащения, мы можем изучать фрактальную размерность уже целой группы элементов и их соотношения между собой. Однако заранее нами были проведены работы, целью которых было формирование подобных групп не на основе экспертных знаний, а с привлечением математического аппарата алгоритма Крускала на основе метрики Роджерса-Танимото (подробнее в Главе 3). Подобная кластеризация дала возможность не только формальному выделению тех групп, которые в большинстве случаев единодушно выделяют эксперты (такие как Au-Ag и прочие), но и указать точное значение их взаимных расстояний в некотором многомерном смысловом пространстве. Таким образом, мы выделили группы элементов, расстояние между которыми существенно выше, чем расстояние внутри групп, и накопительные графики строили не для единичных компонент, а для групп элементов. Рассмотрим основные отличия накопительных графиков таких построений в двойных логарифмических координатах. В случае построения графиков для определения фрактальной размерности для одного компонента или для относительного распределения двух компонент принадлежащих одной группе, например, для графиков Ag-Ag, сравнивая с Ag-Au, начальные точки показывают рост коэффициента наклона от 0.7 до 1.0 и выше (рисунок 2.13 и рисунок 2.17).

Причем нам важны не только сами значения, лежащие в пределах 0.7-1.3, но и их постепенный рост с увеличением исследуемых областей от 10 до 1000 км.

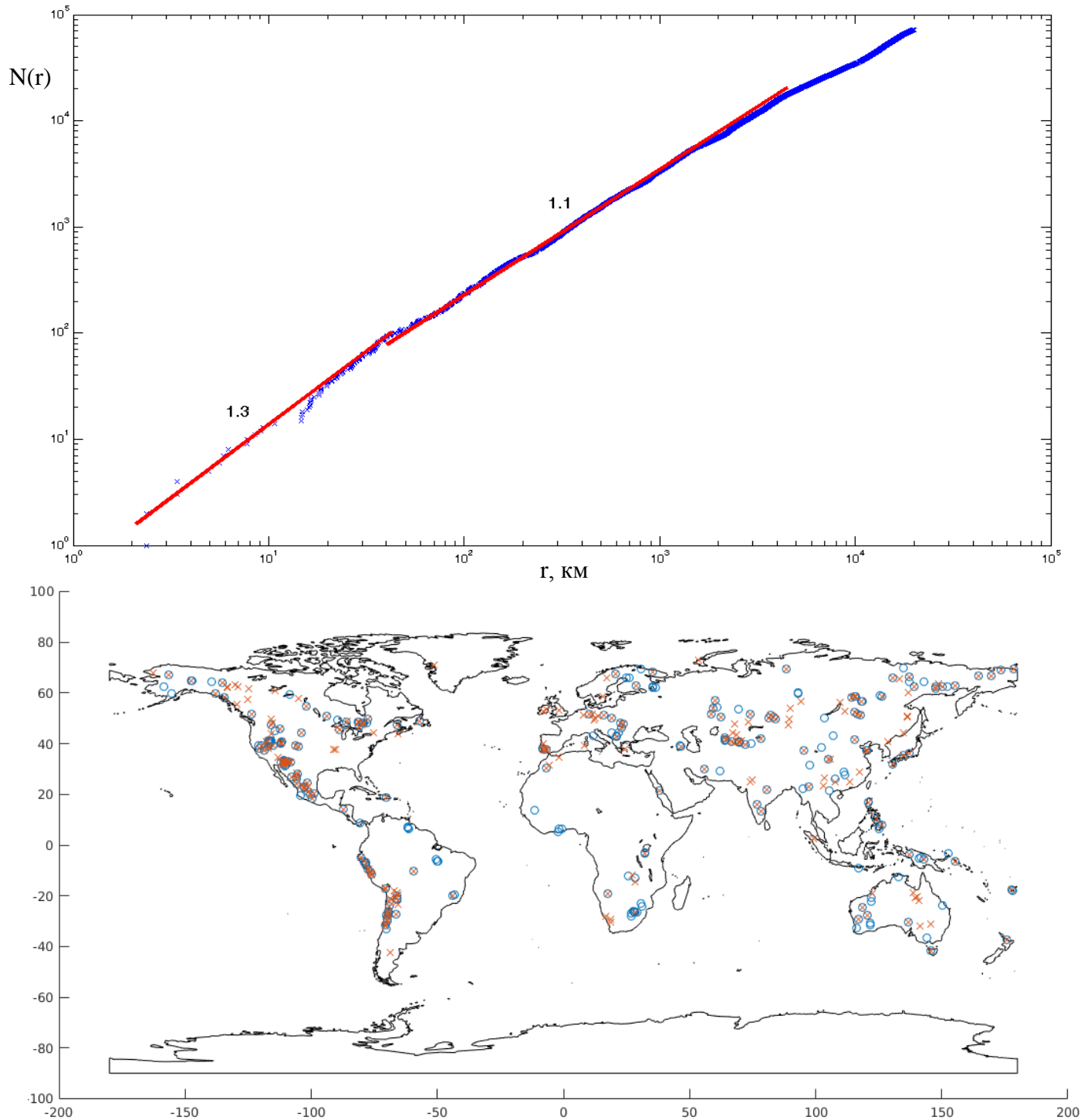


Рисунок 2.17 – Накопительный график для определения смешанной фрактальной размерности распределения серебро-золото (наверху) и месторождения серебра (крестики) и золота (кружки), наложенные на карту (внизу)

В случае выборки других компонент из другой общей группы и изучения поведения фрактальной размерности их расположения, мы видим подобную картину (рисунок 2.18),

когда начальный наклон накопительного графика в двойных логарифмических координатах варьируется в пределах 0.7-1.0 для расстояний изучаемого диапазона и так же обнаруживает постепенный рост на расстояниях 10-1000 км. Выбранные нами группы содержат по два компонента. $\text{TiO}_2\text{-ZrO}_2$ принадлежат к одной группе, а $\text{Ta}_2\text{O}_5\text{-Li}_2\text{O}$ объединены в другую. Согласно описанным исследованиям смысловых расстояний (Глава 3), эти две группы элементов равноудалены от первой использованной нами (Au-Ag) и между собой.

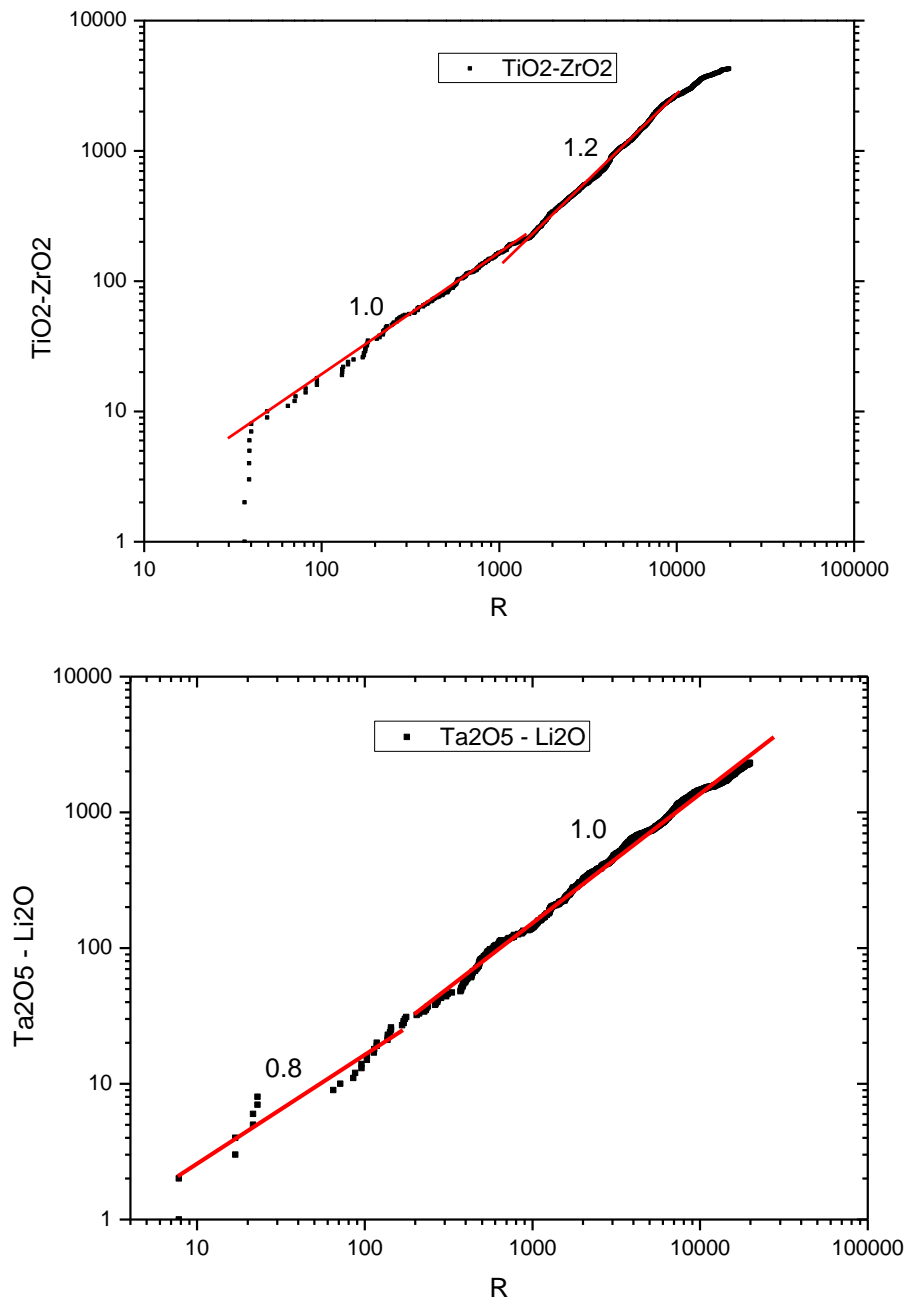


Рисунок 2.18 – Определение смешанной корреляционной размерности для пар: сверху - $\text{TiO}_2\text{-ZrO}_2$; внизу - $\text{Ta}_2\text{O}_5\text{-Li}_2\text{O}$

Теперь рассмотрим примеры взаимного расположения месторождений, когда на накопительном графике будут исследоваться взаимные расстояния месторождений, отвечающих компонентам из разных групп: $\text{TiO}_2 - \text{ZrO}_2$ и $\text{Ta}_2\text{O}_5 - \text{Li}_2\text{O}$. В данном случае, (рисунок 2.19) существенное различие очевидно – это меньшее количество точек в диапазоне 10-100 км по сравнению с картиной, показанной в предыдущих случаях выборки однотипных компонент. Это косвенно подтверждает, что выбранные нами компоненты относятся к различным группам. Основным наблюдением, с нашей точки зрения, является не только значение наклона 1.0-1.6 для исследуемых областей, но и характер его изменения: резкие изломы на начальном этапе 10-100 км и уменьшение угла наклона от максимального 2.5 к минимальному, близкому к 1.

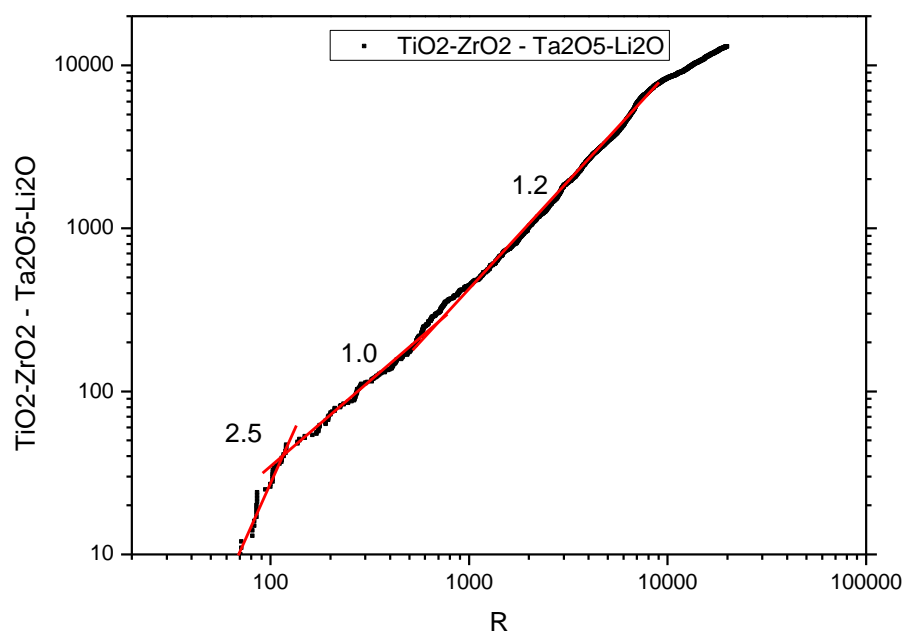


Рисунок 2.19 – Определение смешанной корреляционной размерности между парами $\text{TiO}_2 - \text{ZrO}_2$ и $\text{Ta}_2\text{O}_5 - \text{Li}_2\text{O}$

Мы упоминали, что пары $\text{TiO}_2 - \text{ZrO}_2$ и $\text{Ta}_2\text{O}_5 - \text{Li}_2\text{O}$ выбраны как равноудаленные от группы элементов Ag-Au в смысле меры Танимото-Рожджерса. В завершении рассуждений приведем накопительный график $\text{Ta}_2\text{O}_5 - \text{Li}_2\text{O}$ и Ag – Au (рисунок 2.20). Как и следовало ожидать, значение корреляционной размерности на начальном участке, где изучаемые масштабы лежат в пределах 10-100 км, равно приблизительно 1.5, что несколько ниже, 2.5 для группы $\text{TiO}_2 - \text{ZrO}_2$ и $\text{Ta}_2\text{O}_5 - \text{Li}_2\text{O}$. Можно привести немало других сопоставлений значений

меры Танимото – Роджерса и значений смешанной корреляционной размерности; более детальное сопоставление этих двух методов будет приведено в Главе 4. На данный момент мы ограничимся следующим наблюдением: близкие элементы или группы элементов показывают низкие значения корреляционной размерности.

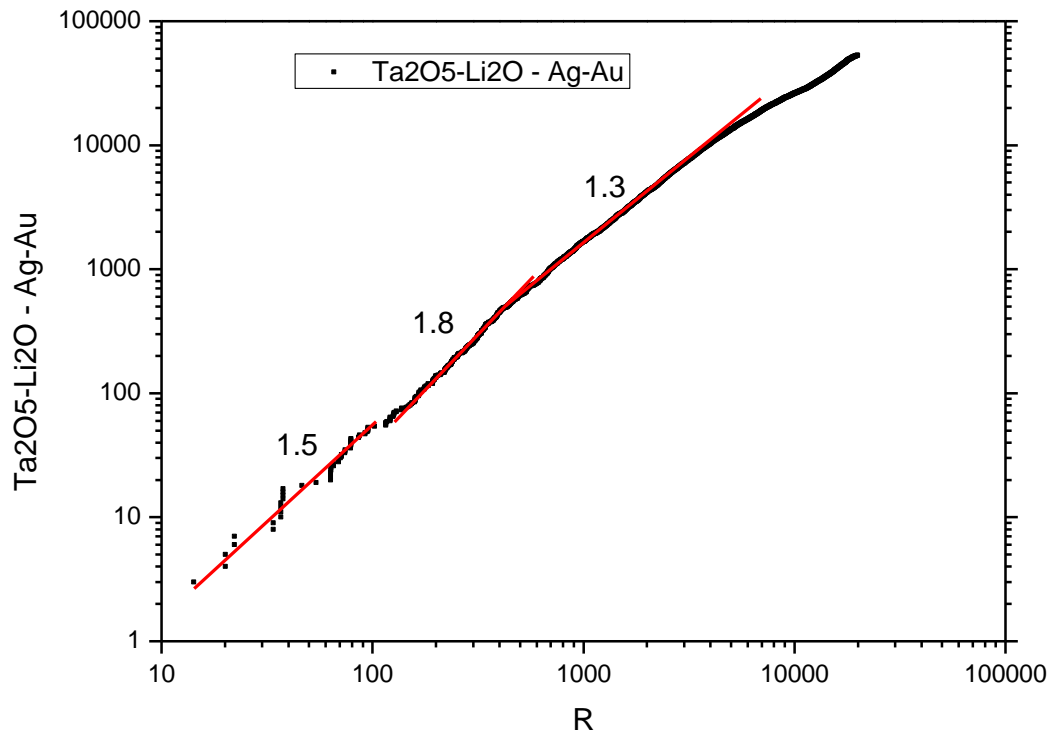


Рисунок 2.20 – Определение смешанной корреляционной размерности между парами $\text{TiO}_2 - \text{ZrO}_2$ и $\text{Ag} - \text{Au}$

В дополнении к уже описанным закономерностям, мы можем провести обратный качественный анализ меры Роджерса-Танимото и указать, основываясь на новых накопительных графиках в двойных логарифмических координатах, принадлежат ли исследуемые компоненты к одной группе или нет. Не приводя самих мер Танимото-Роджерса (они будут даны в Главе 3) проанализируем наклон накопительного графика для компонент Zn и Pb. Общее количество месторождений, содержащих хотя бы один компонент равно 193 и 179 соответственно.

То есть, участие обоих компонентов в общей картине распределения месторождений одинаково. Наклон графика (рисунок 2.21) в областях 10^1-10^2 км равен 0.7 и увеличивается вплоть до 1.5 на участке 10^2-10^3 км. Таким образом, мы можем заключить, что Zn и Pb

являются элементами из одной группы. Действительно, наш вывод согласуется с большинством экспертных мнений.

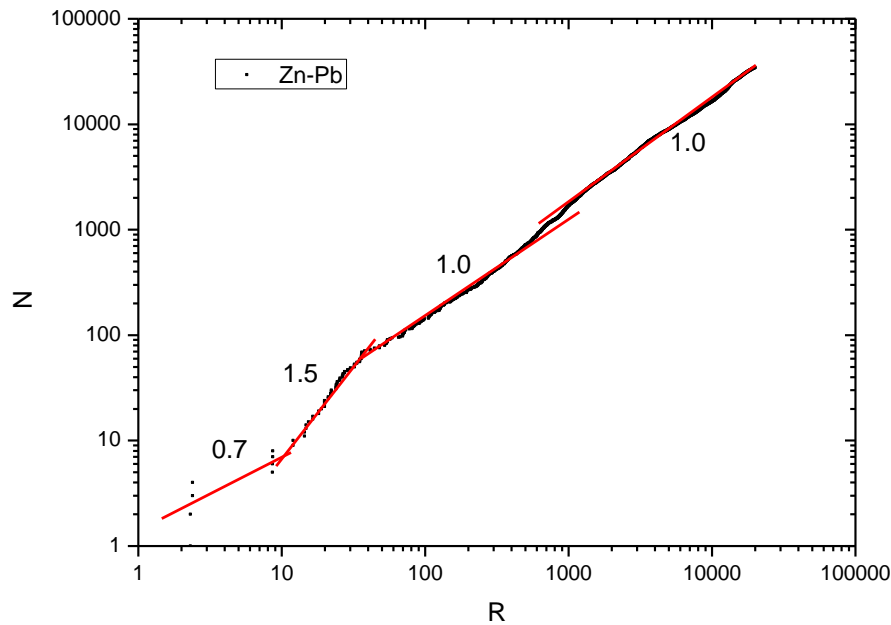


Рисунок 2.21 – Определение смешанной корреляционной размерности между Zn и Pb

Мы можем предположить, что подобные месторождения, содержащие компоненты, характеризующиеся «отталкиванием», сформировывались различными механизмами. Мы можем даже высказать предположение, что, изучая подобные группы элементов мы не только участвуем в получении формального обосновании уже сложившихся методов классификации рудных компонент, но и указываем на возможное количество различных механизмов, приводящих к образованию крупных и суперкрупных месторождений. В принципе, любая классификация имеет одной из своих целей попытку сформулировать происхождение объектов классификации, и в этом смысле мы продолжаем эти традиции.

2.3.3 Использование специализированных баз данных

В качестве продолжения выбранного направления исследований новые результаты можно получить, используя специализированные базы данных рудных месторождений. Автор признателен А.В. Ткачеву (ГГМ РАН, Москва) за предоставленные данные по седиментационным и порфирировым месторождениям меди. По привычной уже схеме получим

значения корреляционной размерности для порфировых и седиментационных месторождений меди (рисунок 2.22, линии PorCu SedCu) [Шатахцян, 2017].. Для наглядности, поместим уже исследованные ранее зависимости $lg(N(r))$ от $lg(r)$ для месторождений меди из БД на тот же график (рисунок 2.22, линия Cu-Cu). Начальные наклоны накопительных графиков обнаруживают корреляционную размерность около 1.5 -2.0 и перелом происходит на расстоянии 20 – 50 км. Впрочем, впоследствии, график меди не демонстрирует отклонений от 1, что говорит о приуроченности к линейным объектам.

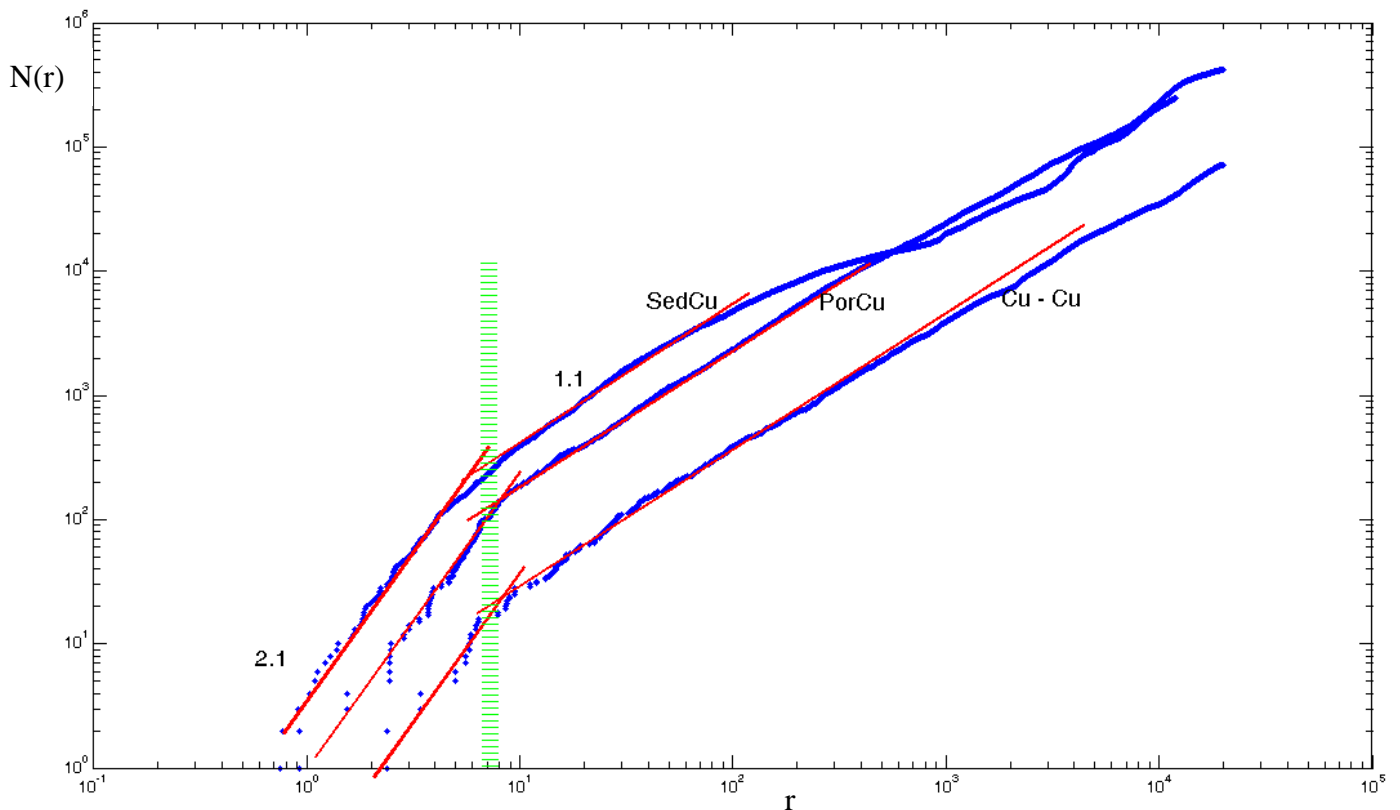


Рисунок 2.22 – Определение корреляционной размерности для различных по формированию месторождений меди

На характерных расстояниях 1-10 км для седиментационных и порфировых месторождений существует значительно больше данных. Это дает уникальную возможность проверки метода определения корреляционной размерности на небольшом количестве данных (для базы КСКМ на соответствующем участке графика количество месторождений значительно меньше). В первом приближении, наклон графика остается неизменным, что может косвенно подтверждать, что выбранный метод показывает общие закономерности распределения месторождений даже на сравнительно малом объеме данных.

2.3.4 Кластеризация на основе смешанной корреляционной размерности

Метод определения смешанной корреляционной размерности, предложенный в работе, наследует от метода вычисления корреляционной размерности D_2 возможность вычисления этого параметра на разных масштабах. Для определения генетической связи рудных компонент наиболее информативным представляется исследование смешанной корреляционной размерности на небольших масштабах ($10^1 - 10^2$ км). Именно на малых расстояниях (рисунок 2.12) проявляется взаимное отталкивание месторождений, требующих для своего формирования разных геолого-тектонических условий, согласно построенной модели. Смешанная корреляционная размерность как характеристика взаимной приуроченности месторождений имеет смысл для наиболее часто встречающихся видов сырья (особенно, на выбранном масштабе). В случае плохой распространенности – полученная характеристика будет содержать высокую ошибку. Выбранные наиболее часто встречающиеся виды сырья (более 75 штук) дополнены данными по алмазу, представляющему интерес в связи со своим особым режимом формирования. Полученные значения для выбранных масштабов приведены в Таблице 2.2.

Таблица 2.2 – Величины смешанной корреляционной фрактальной размерности для взаимных расстояний в диапазоне 10-100 км

	N	Виды рудного сырья												
		Au	Ag	Cu	Co	Fe	Mo	Ni	P	Pb	Sn	U	Zn	алмазы
Au	264	0.3	0.31	0.31	0.37	0.80	0.33	0.39	2.33	0.37	0.83	0.6	0.36	1.48
Ag	272		0.23	0.31	0.23	0.86	0.36	0.38	3.12	0.27	0.45	1.14	0.27	1.52
Cu	269			0.52	0.63	1.21	0.67	0.61	1.52	0.59	0.64	1.44	0.58	1.98
Co	78				0.39	0.50	1.57	0.34	1.61	1.01	1.59	1.00	0.85	1.27
Fe	226					0.45	1.62	0.62	0.94	1.24	1.14	1.68	1.16	1.47
Mo	128						0.54	1.85	2.02	0.92	1.25	1.35	0.89	1.29
Ni	85							0.34	1.38	1.20	1.46	0.96	1.09	2.04
P	85								0.44	1.71	1.49	0.71	1.59	0.97
Pb	179									0.42	0.79	1.53	0.43	2.91
Sn	101										0.38	1.16	0.77	1.16
U	78											0.42	1.58	01.56
Zn	193												0.41	2.34
алмазы	40													0.36

Примечание – общее количество описанных месторождений в базе дано в первом столбце (N).

Приведенная матрица (таблица 2.2) по диагонали содержит данные не смешанной, простой корреляционной фрактальной размерности элемента, отвечающая распределению элемента относительно самого себя. Для проведения кластеризации необходимо выполнить условие нуля расстояния между одним и тем же элементом. Это можно сделать несколькими способами, например, провести некую нормировку и вычитание базиса в каждом конкретном случае. Однако, принимая во внимание отсутствие указаний по такой нормировке в литературе, возможно излишнее усложнение предлагаемого нового метода, а также различную природу этих размерностей, в качестве примера имеет смысл отойти от формализма и принять эти значения равными нулю. Полученная симметричная матрица, таким образом, должна содержать нули по диагонали. Если принять данные значения как некоторые расстояния в смысловом пространстве близости рудных компонент, матрица в таком виде готова для построения графа и поиска минимального остовного дерева, используя алгоритм Крускала (подробнее действия по построению дендрограмм описаны в Главе 3). Имеющаяся функция `dendrogramm` пакета `MatLab` приводит изложенные выкладки к графическому результату (рисунок 2.23) – кластеризации выбранных компонент.

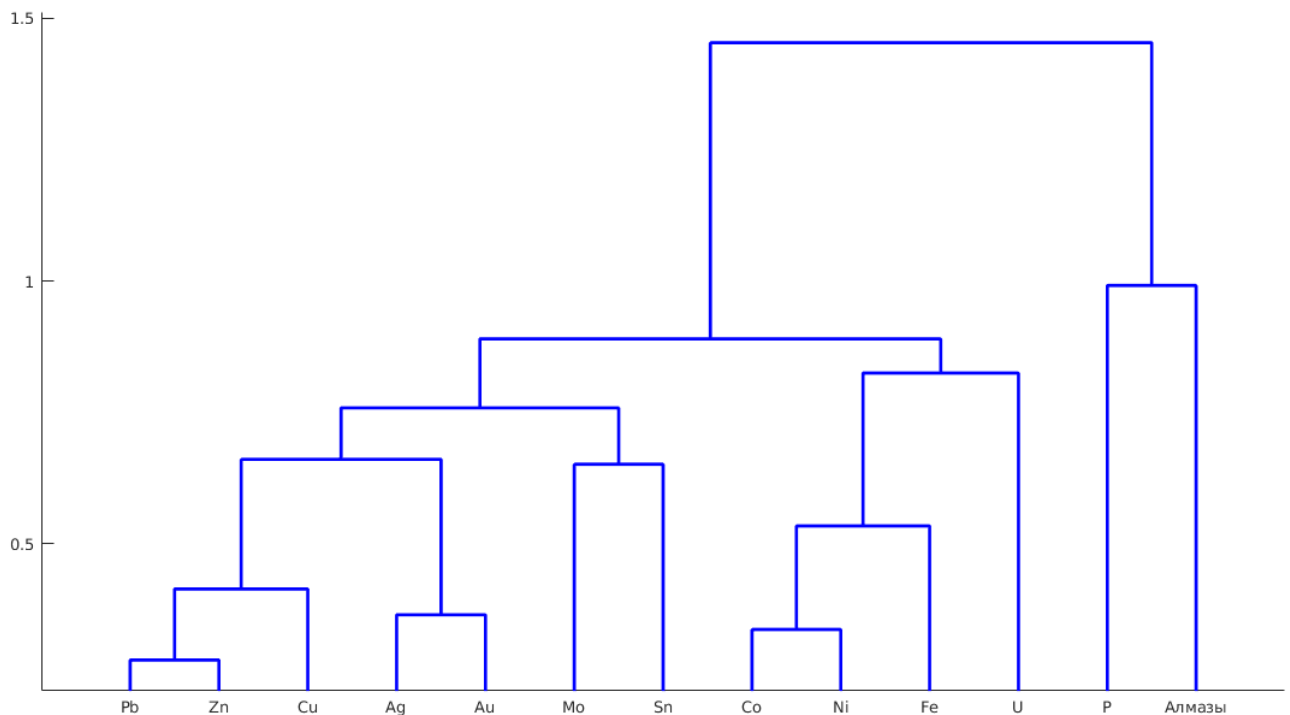


Рисунок 2.23 – Дендрограмма кластеризации рудных компонент на основе матрицы значений смешанной фрактальной размерности, построенная методом попарного среднего

Построение дендрограмм, их вид и подробнее обсуждение приводится в Главе 3. На данном этапе можно отметить несколько групп элементов, объединяющихся на низком уровне классификации (значит, наиболее генетически близких друг к другу): Pb+Zn, Ag+Au, Co+Ni, которые выделяются также методом экспертной оценки. Интересным результатом предложенной классификации являются численные значения близости внутри этих групп и между группами. В силу некоторой ограниченности метода (в силу ряда причин, в том числе небольшого набора данных по некоторым видам сырья), определение взаимных расстояний между элементами и их группами имеет смысл до некоторого значения, после которого объединение элементов в некоторые «над-классы», скорее всего, не является правдоподобным. Скорее всего, на больших значениях правильнее говорить об объединении всех больших групп и отдельно стоящих элементов одновременно. В этом свете, достоверным выглядит выделение алмаза в отдельную группу, наряду с фосфором и, возможно, ураном, без предварительного объединения их в промежуточные «над-классы».

2.4 Выводы к главе 2

Применение метода расчета корреляционной фрактальной размерности было опробовано на модельных примерах распределения гипотетических месторождений с заданными параметрами в среде MatLab. Полученные данные о границах применимости метода были использованы при анализе реальных данных распределений.

В случае определения фрактальной размерности месторождений Au, Ag или любого иного элемента задача полностью аналогична традиционным расчетам фрактальной размерности множества эпицентров землетрясений. Оказалось, что для рудных месторождений типична следующая ситуация: на малых расстояниях (обычно до 100-200 км) наклон графика $lg(N(r))$ от $lg(r)$ как правило, весьма мал, меньше единицы, указывая на концентрацию месторождений вокруг нуль-мерных «рудных узлов». Затем, в интервале от 100 до 1000 и более км, наклон графика (он же корреляционная размерность D_2) близки к единице, указывая на приуроченность месторождений к протяженным линейным структурам (обычно современным и палеограницам плит). На еще большем масштабе корреляционная размерность возрастает до $D_2 \cong 2$, предположительно отвечая случайной ориентации соседних террейнов. Далее корреляционная размерность снова уменьшается, в соответствии с тем, что все известные крупные и суперкрупные рудные месторождения расположены на суше (на акваториях в используемой БД месторождения не указаны). Можно видеть, что графики для

большинства видов рудного сырья ведут себя схожим образом, различия в основном связаны с разным числом месторождений; так для алмаза (всего 40 месторождений) график обнаруживает некоторый отскок.

Методологически новым подходом в расчете корреляционной размерности стал предложенный метод смешанных корреляционных размерностей. С одной стороны, этот метод наглядно показывает взаимную приуроченность компонент месторождений к возможно общим условиям образования и дает некоторую количественную меру этой приуроченности. С другой стороны, в отсутствие достаточного количества месторождений, обратившись к данным о мере Танимото-Роджерса, в расчет смешанной корреляционной размерности могут быть добавлены месторождения родственных элементов. Таким образом, повышая количество исследуемых месторождений, представляется возможным делать такое исследование статистически подкрепленным.

ГЛАВА 3. КЛАСТЕРИЗАЦИЯ РУДНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ

Кластеризация (или кластерный анализ) — это задача разбиения множества объектов на группы, называемые кластерами. Внутри каждой группы должны оказаться «похожие» объекты, а объекты разных группы должны быть как можно более отличны. Главное отличие кластеризации от классификации состоит в том, что перечень групп четко не задан и определяется в процессе работы алгоритма [Jain, 1999]. Таким образом, группы появляются в ходе исследования, а не задаются изначально. С точки зрения нашего исследования именно кластеризация могла бы привнести новые детали в современную картину классификации рудных компонент. Выбирая наиболее формализованные признаки, и используя различные меры сходства результаты исследования будут максимально освобождены от влияния экспертной оценки.

3.1 Кластеризация рудных месторождений

3.1.1 Этапы кластеризации

При проведении кластеризации выделяют несколько этапов, каждый из которых оставляет выбор конкретной стратегии за исследователем, и в зависимости от конкретной задачи эти стратегии могут варьироваться:

1. Отбор выборки объектов для кластеризации;
2. Определение множества переменных, по которым будут оцениваться объекты в выборке. При необходимости – нормализация значений переменных;
3. Вычисление значений меры сходства между объектами;
4. Применение одного из вариантов кластерного анализа для создания групп сходных объектов (кластеров);
5. Представление и обсуждение результатов анализа;

После получения и анализа результатов в общем случае возможна корректировка выбранной метрики и метода кластеризации до получения оптимального результата. В нашей

работе мы неоднократно производили корректировку некоторых этапов, однако в качестве конечного результата мы приводим наиболее оптимальную на данный момент цепочку рассуждений. Однако, в некоторых случаях мы будем указывать на параллельные варианты проведения исследований. Приведем краткое описание перечисленных этапов.

В работе использованы данные ГИС КСКМ, из которых выбраны наиболее часто встречающиеся виды рудного сырья. Это означает, что количество месторождений, содержащих эти виды сырья, или их «встречаемость» в базе данных более 39. В выборку так же включены такие компоненты, как: Tl (3) (в некоторые варианты расчета) Pt (7) В2О3 (18) Cr2O3 (25) Hg (30), алмазы. В скобках указана встречаемость данного вида сырья в базе ГИС. Привнесение этих компонент в анализ преследуют две цели: исследуется возможность кластеризации при критически малом количестве данных и получение наиболее полной картины классификации, в которой представлены наиболее известные компоненты. Общее количество различных компонент в выборке 30. Общее количество месторождений в базе 1163. Для применения используемых ниже алгоритмов использовалась база данных, представляющая собой матрицу значений, в которой указаны координаты месторождения и наличие или отсутствие того или иного полезного компонента.

Объекты (рудные компоненты месторождений) оценивались по единственной переменной: наличия или отсутствия данного компонента. С математической точки зрения, это означает ноль или единицу в соответствующей исследуемой матрице. Однако такой подход накладывает некоторые ограничения на наше исследование. Наличие или отсутствие того или иного полезного компонента определено с учетом рентабельности его извлечения [Родкин 2010, 2012]. Так, общее количество рудных компонент может быть достаточно велико, однако в базе КСКМ будут указаны только те из них, которые реально добываются, что содержит в себе некоторую «экономическую» поправку, которую мы не можем учесть из-за специфики базы. Таким образом, принцип разграничения понятий наличие – отсутствие рудного компонента в данном рудном месторождении остается за скобками работы. Заметим, что указанный способ выбора переменных для оценки объектов выборки не требует нормализации.

3.1.2 Мера Танимото-Роджерса

Обычно при кластеризации используются метрические меры взаимного расстояния R_{ij} между любыми элементами i, j . Метрические меры удовлетворяют трем известным требованиям:

- 1) $R_{ii} = 0$,
- 2) $R_{ij} = R_{ji}$,
- 3) $R_{ij} \leq R_{ik} + R_{kj}$,

для любых элементов i, j, k (правило треугольника).

Для полноты изложения отметим, что многим природным объектам (и рудным проявлениям и месторождениям в их числе) свойственна иерархичность. Причем такая иерархичность полагается важным их свойством. Поэтому, естественно пробовать проводить их кластеризацию на основе математических подходов, исходно предполагающих наличие иерархичности. Такой подход может быть реализован на основе использования ультраметрики, т.е. когда третье условие (правило треугольника): $R_{ij} \leq R_{ik} + R_{kj}$ – заменяется на более жесткое условие: $R_{ij} \leq \max(R_{ik}, R_{kj})$, которое и обеспечивает иерархичность.

Примеры эффективного применения ультраметрических расстояний приводятся в [Mantegna, 2000]. Однако, таких примеров довольно мало. В частности, нам не известно попыток применения ультраметрических пространств для анализа данных по месторождениям. Это один из вариантов, испробованных в процессе работы.

Для оценки степени близости двух месторождений с разными наборами рудных компонент нами используется мера Танимото-Роджерса (M_T) [Мандель, 1988]:

$$M_T = (A \cap B) / (A \cup B) \quad (3.1)$$

где $(A \cap B)$ – число пересечения признаков A и B (в нашем случае, число случаев сонахождения руд A и B в одном и том же месторождении); $(A \cup B)$ – объединение множеств признаков A и B (в нашем случае – сумма числа месторождений компонентов A и B без повторов).

Очевидно, что если A всегда сопутствует B : $T(A, B) = T(A, A) = 1$. Если A и B вместе не встречаются, $T(A, B) = 0$. Графически, принцип применения меры представлен на рисунке. 3.1.

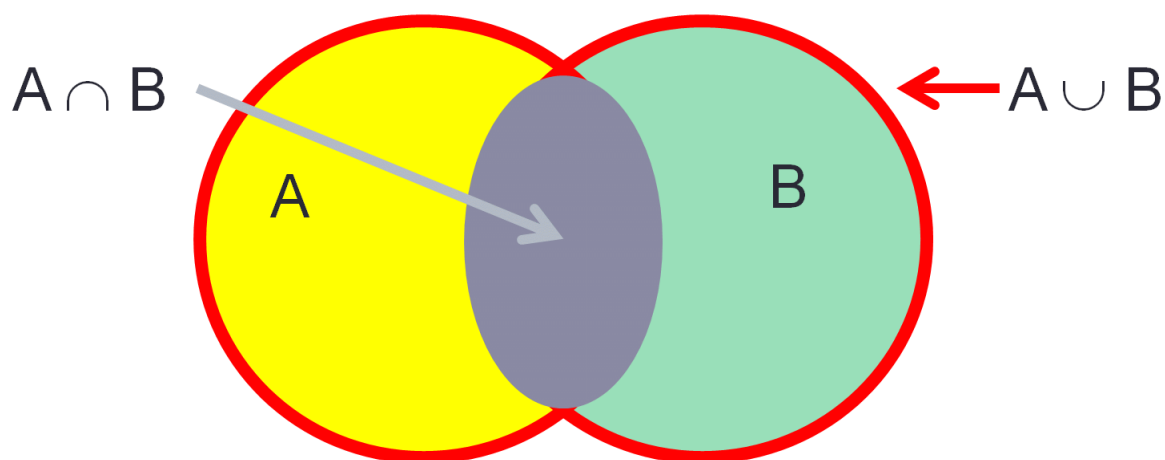


Рисунок 3.1 – Графическое представление принципа расчета меры Танимото-Роджерса. A и B – множества месторождений, содержащих компонент A и B , соответственно. $A \cap B$ – пересечение множеств A и B , количество месторождений содержащих руды A и B в одном и том же месторождении; $A \cup B$ – объединение рассматриваемых множеств A и B – сумма числа месторождений компонентов A и B без повторов

Мера Танимото-Роджерса (Т-Р) выбрана как удобная для описания близости месторождений с различными наборами рудных компонент. Основным вариантом меры Т-Р для двух объектов (здесь месторождений, или наборов встречаемости данного вида сырья) определяется как отношение числа совпадающих элементов в двух данных множествах к суммарному числу элементов в этих множествах. Для практического использования необходимо также использовать понятие расстояния, основанного на выбранной мере. Примем расстояние $R=(1-T)^n$, где степень n служит для получения более удобных числовых значений величин расстояний R . Ниже обычно полагается $n=1$.

Прежде чем переходить к обсуждению используемого метода кластеризации и полученных предварительных результатов отметим определенную ограниченность используемого подхода. Известно [Lemin, 2001], что ультраметрическое пространство, состоящее из $n+1$ точки, не может быть изометрически вложено в евклидово пространство размерности меньшей n . Исходя из этого, а также из работ по кластеризации с использованием мер Танимото-Роджерса [Смолин, 2007] можно видеть, что задание величин всех взаимных расстояний между объектами (в данном случае между разными месторождениями) и выделение на этой основе кластеров не позволяет перейти к определению координат объектов (характеристик отдельных месторождений и их кластеров). Это ограничение довольно существенно. Из него следует, в частности, что нельзя, в общем случае, определить

(обобщенные) координаты (характеристики) выделяемых кластеров. То есть, охарактеризовать выделяемые кластеры иначе, как перечислением входящих в них элементов (месторождений), в общем случае, не представляется возможным. Данное ограничение для настоящей работы, однако, несущественно.

3.1.3 Применение меры Танимото-Роджерса

Выбрав меру Танимото-Роджерса (Т-Р) для определения значения меры сходства рудных компонент и пояснив особенности ее применения, перейдем к рассмотрению результатов ее применения к массиву данных. Мера была применена к базе КСКМ таким образом, что на выходе была получена матрица мер конвергенции, а именно матрица мер сходства объектов в смысле выбранной меры. Очевидно, это диагональная матрица. Ее дальнейшее использование необходимо для дальнейшей обработки и выделения кластеров и построения дендрограммы. Дендрограмма представляет собой граф без циклов и позволяет изобразить взаимные связи между объектами из заданного множества [Жамбю, 1988]. Однако, даже не проводя дальнейших вычислений при беглом осмотре значений матрицы мы видим наиболее близкие компоненты. В таблице 3.1 показана часть матрицы мер различий и выделены элементы с наименьшим значением меры Т-Р. Алгоритм кластеризации оставляет свободным параметром число кластеров, оно задается исследователем из соображений удобства. Среди таких возможных вариантов отметим случай разбиения на три класса пространственно тяготеющих друг к другу рудных компонент, включающие следующие виды сырья:

1. Al, алмазы, Fe, Mn, Cr, V, Ti;
2. В, F, слюды; Sn, W, Mo; U; Li, Ta, Be, Nb, Zr, TR;
3. Au, Ag, Sb, Hg, P, соли; Pb+Zn, Cu+Co, PGE, Ni.

Без построения дендрограммы сложно говорить о том, в какие группы попадут эти компоненты в итоге, однако очевидно, что они имеют малые значения меры Т-Р, что означает их близость в исследуемом пространстве базы КСКМ и косвенно подтверждает выбор алгоритма и направление работ.

Из трех этих групп, первая состоит исключительно из элементов с обогащением в нижней коре (Al хоть и слабо, но обогащен, а алмазы характерны для глубоко эродированных кристаллических щитов, то есть тоже в большей степени приурочены к низам коры). Вторая группа составлена исключительно рудным компонентам с обогащением в верхней коре.

Третья группа, в основном, отвечает компонентам с обогащением в нижней коре, (за исключением случая Pb).

Таким образом, результаты применения метода кластеризации для групп месторождений также показали тенденцию их группирования в кластеры, отвечающие направленности преобразования вещества коры либо в ходе восходящих, либо в ходе нисходящих тектонических движений [Родкин, 2015].

Для перехода к более удобному виду, матрицу различий необходимо преобразовать в матрицу сходств. Для этого, вычтем каждый элемент матрицы из единицы, и в таком виде матрицу можно использовать для кластеризации.

3.1.4 Алгоритм Краскала

Алгоритмы кластеризации можно разделить на две большие группы. Иерархические и плоские, четкие и нечеткие. Иерархические алгоритмы (также называемые алгоритмами таксономии) строят не одно разбиение выборки на непересекающиеся кластеры, а систему вложенных разбиений. Таким образом, на выходе мы получаем дерево кластеров, корнем которого является вся выборка, а листьями — наиболее мелкие кластера. Среди алгоритмов иерархической кластеризации выделяются два основных типа: восходящие и нисходящие алгоритмы. Нисходящие алгоритмы работают по принципу «сверху-вниз»: вначале все объекты помещаются в один кластер, который затем разбивается на все более мелкие кластеры. Более распространены восходящие алгоритмы, которые в начале работы помещают каждый объект в отдельный кластер, а затем объединяют кластеры во все более крупные, пока все объекты выборки не будут содержаться в одном кластере. Таким образом строится система вложенных разбиений. Результаты таких алгоритмов обычно представляют в виде дерева – дендрограммы. Классический пример такого дерева – классификация животных и растений. Алгоритм Краскала (или Крускала) – алгоритм построения минимального остовного дерева (МОД) [Mantegna, 2000, West, 1996] взвешенного связного неориентированного графа. Алгоритм впервые описан Джозефом Крускалом [Kruskal, 1956] в 1956 году. Вначале текущее множество ребер устанавливается пустым. Затем, пока это возможно, проводится следующая операция: из всех ребер, добавление которых к уже имеющемуся множеству не вызовет появления в нем цикла, выбирается ребро минимального веса и добавляется к уже имеющемуся множеству. Когда таких ребер больше нет, алгоритм завершен. Подграф данного графа, содержащий все его вершины и найденное множество ребер, является его остовным деревом минимального веса.

В случае использования иерархических алгоритмов встает вопрос, как объединять между собой кластеры, как вычислять «расстояния» между ними [Уиллиамс, 1986]. Существует несколько способов [Lance, 1967]:

Одиночная связь (расстояния ближайшего соседа) – расстояние между двумя кластерами определяется расстоянием между двумя наиболее близкими объектами

(ближайшими соседями) в различных кластерах. Результирующие кластеры имеют тенденцию объединяться в цепочки.

Полная связь (расстояние наиболее удаленных соседей) – расстояния между кластерами определяются наибольшим расстоянием между любыми двумя объектами в различных кластерах (т.е. наиболее удаленными соседями). Этот метод обычно работает очень хорошо, когда объекты происходят из отдельных групп. Если же кластеры имеют удлиненную форму или их естественный тип является «цепочечным», то этот метод непригоден.

Невзвешенное попарное среднее – расстояние между двумя различными кластерами вычисляется как среднее расстояние между всеми парами объектов в них. Метод эффективен, когда объекты формируют различные группы, однако он работает одинаково хорошо и в случаях протяженных («цепочечного» типа) кластеров.

Взвешенное попарное среднее – метод идентичен методу невзвешенного попарного среднего, за исключением того, что при вычислениях размер соответствующих кластеров (т.е. число объектов, содержащихся в них) используется в качестве весового коэффициента. Поэтому данный метод должен быть использован, когда предполагаются неравные размеры кластеров.

Невзвешенный центроидный метод – расстояние между двумя кластерами определяется как расстояние между их центрами тяжести.

Взвешенный центроидный метод (медиана) – метод идентичен предыдущему, за исключением того, что при вычислениях используются веса для учета разницы между размерами кластеров. Поэтому, если имеются или подозреваются значительные отличия в размерах кластеров, этот метод оказывается предпочтительнее предыдущего.

В данной работе использовался алгоритм Краскала для определения МОД, а затем, методом *взвешенного попарного среднего*, производилась собственно сама кластеризация и создание групп (выделение кластеров). Однако, были построены так же и другие дендрограммы, с использованием описанных методов, и полученные результаты сравнены между собой.

С точки зрения строгого математического подхода, у нас еще остается выбор метрики, которой мы будем считать расстояния, изложенные выше. В данном случае, у нас нет необходимости или оснований использовать что-либо сложнее привычного евклидова расстояния.

3.2 Дендрограмма рудных компонент

Выбор разных вариантов подсчета расстояний по-разному влияет на конечный результат графического представления. Рассмотрим некоторые получающиеся результаты.

Поскольку задача визуализации классификации подразумевает, что ветвление будет происходить на группы, которые не могут стоять «ближе» друг от друга, чем их подгруппы, логично исключить из рассмотрения центроидные методы: как взвешенный (рисунок 3.2) так и невзвешенный (рисунок 3.3).

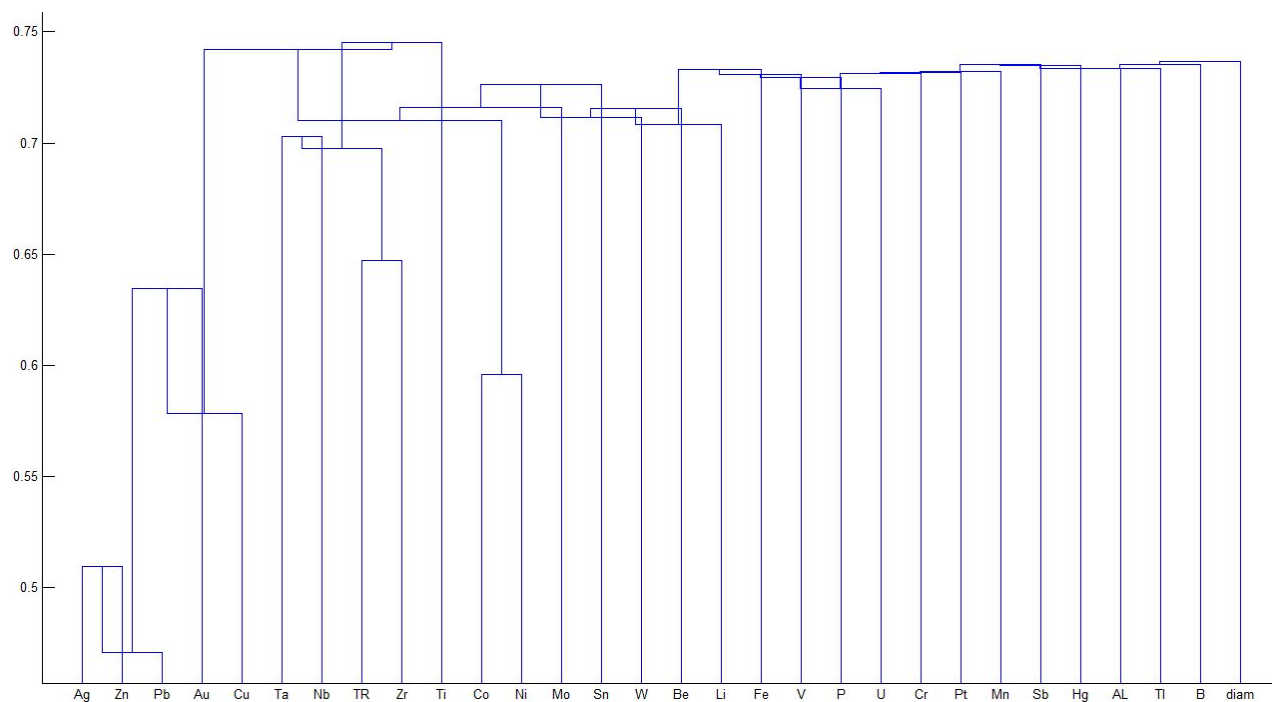


Рисунок 3.2 – Дендрограмма рудных компонент, взвешенный центроидный метод

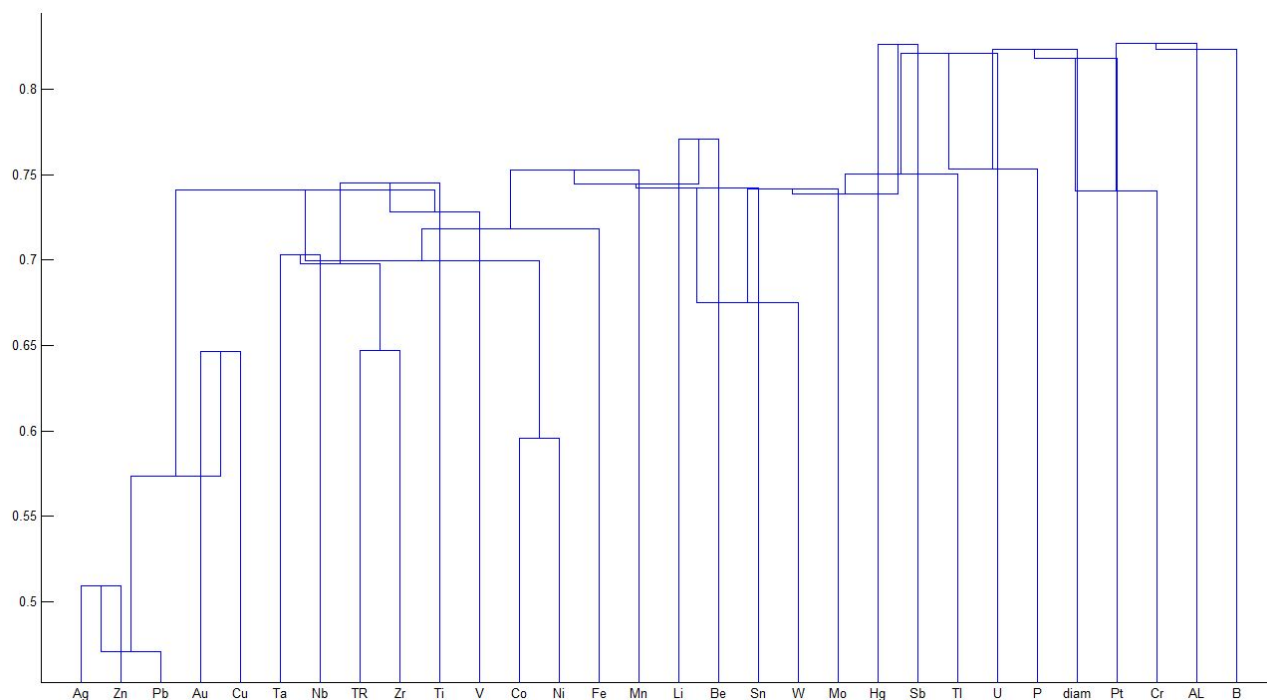


Рисунок 3.3 – Дендрограмма рудных компонент, невзвешенный центроидный метод

Подобные структуры не соответствуют привычной картине классификации, не хотелось бы лишний раз углубляться в тонкости различных классификаций и предлагать неочевидные дендрограммы. Однако, приведенные примеры могут быть использованы в будущем для более детального исследования всех аспектов классификации рудных месторождений.

Наиболее логичным было бы использование метода попарного среднего и взвешенного попарного среднего. Поскольку расчеты производятся на современном персональном компьютере, то задача минимизации времени расчетов на выбранном объеме базе данных не актуальна. В таком случае, наиболее удачным был бы метод взвешенного попарного среднего, поскольку он лучше работает с группами, содержащими различное количество конечных «листьев». Как видно из рисунков 3.4 и 3.5, оба алгоритма создают одинаковые группы вплоть до расстояний ~ 0.9 единиц. Так, на обоих графиках мы видим группы Ag-Zn-Pb-Au-Cu или Ta-Nb-Li-Be объединенные на уровне не выше 0,8. Однако, существуют и другие массивные группы, одинаково объединенные на высоких уровнях, как показано на рисунке 3.6. Единообразие такого выделения кластеров различающимися методами является дополнительным свидетельством объективности и робастности (устойчивости) получаемой кластеризации.

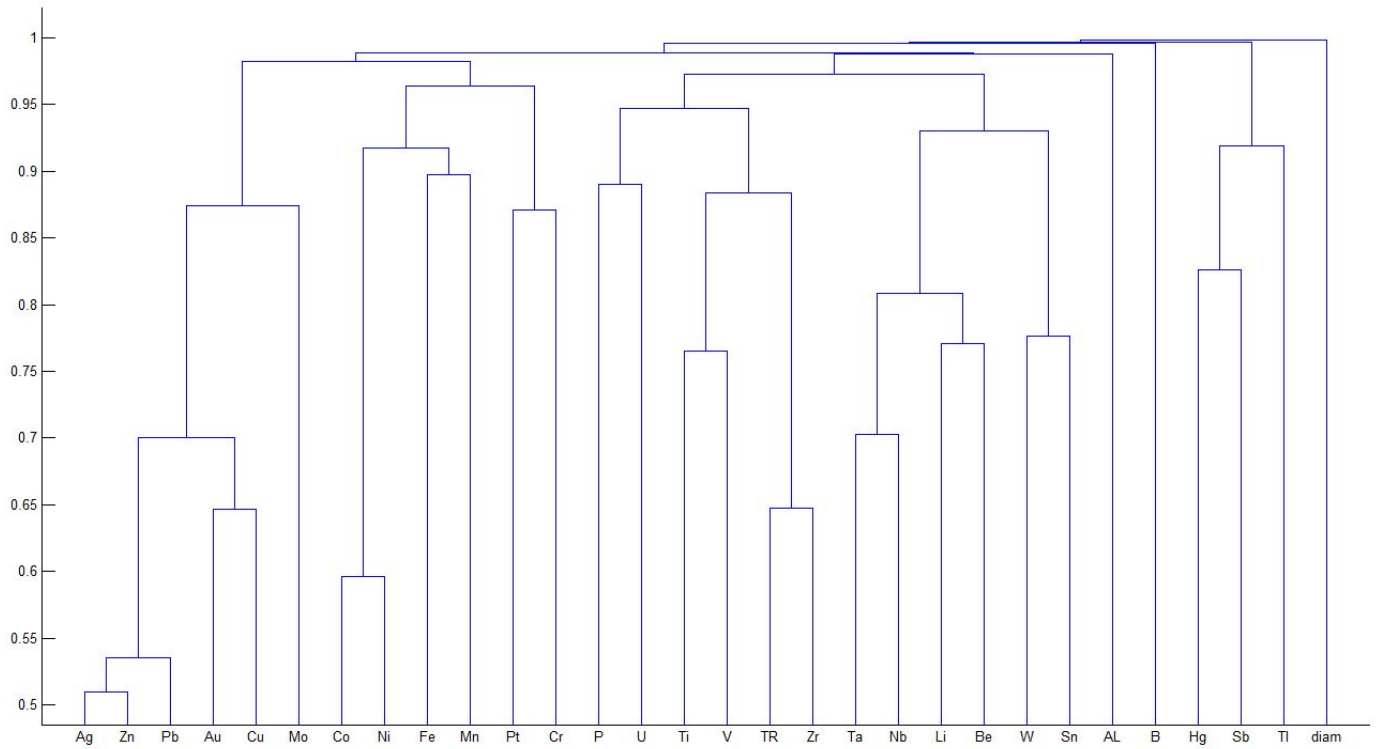


Рисунок 3.4 – Дендрограмма рудных компонент метода попарного среднего

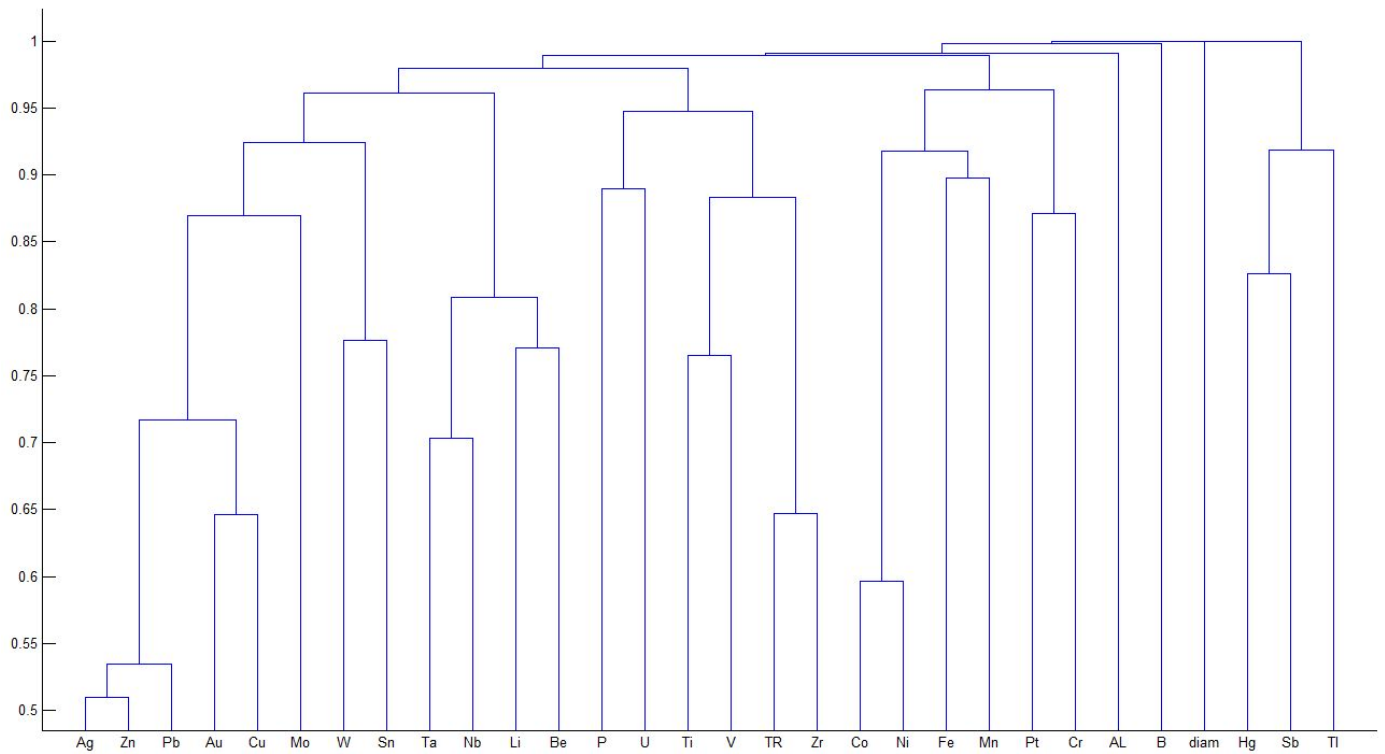


Рисунок 3.5 – Дендрограмма рудных компонент, полученная методом взвешенного попарного среднего

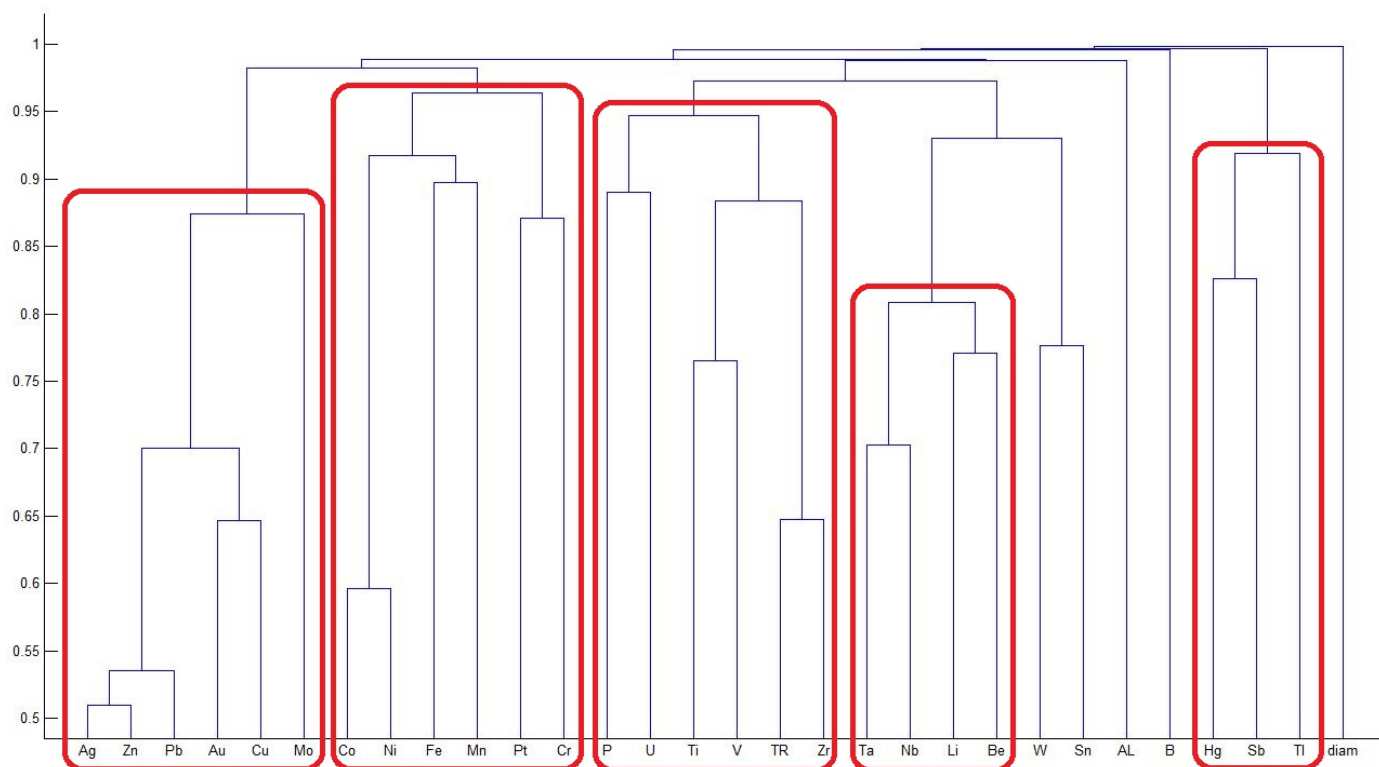


Рисунок 3.6 – Дендрограмма рудных компонент с выделенными общими участками для методов попарного среднего и взвешенного среднего

Вопрос о линейных размерах месторождений был затронут ранее. Поскольку в ГИС КСКМ представлены только значения координат точек на земной поверхности, имеет смысл оценить, как бы могло повлиять на результат нашего исследования объединение соседних точек в одно месторождение. Объединим все точки, лежащие на расстоянии менее 2 градусов (около 220 км) и попробуем провести анализ меры Т-Р на полученных данных. Алгоритм действий будет следующий: измеряется расстояние между точками попарно, если расстояние меньше 2 градусов, и месторождения содержат исследуемые элементы, то это будет приниматься как пересечение и увеличивать числитель дроби (уравнение 3.1), а знаменатель по-прежнему будет состоять из общего количества содержащих данные элементы месторождений. Такой подход можно использовать только для получения сравнительной характеристики, но не для получения точного значения меры Т-Р, так как мы не учитываем того факта, что соседние месторождения могут «перекрываться» друг другом несколько раз в ходе предложенного алгоритма. Таким образом, значения меры Т-Р могут быть больше

единицы. В таблице 3.2 показана часть матрицы значений мер Т-Р для месторождений, находящихся на расстоянии не более 2 градусов.

Таблица 3.2 – Часть матрицы мер Танимото-Роджерса для месторождений, находящихся на расстоянии не более 2 градусов

	Au	Co	Cu	Fe	Mo	Ni	Pb	W	Zn	Zr	Hg	Li	Pt	Sb	Cr	Nb	Be
Ag	0.87	0.15	0.92	0.15	0.56	0.10	0.76	0.15	0.78	0.02	0.13	0.05	0.01	0.23	0.01	0.02	0.05
Au		0.14	0.76	0.19	0.51	0.15	0.43	0.09	0.48	0.05	0.15	0.03	0.05	0.24	0.07	0.02	0.04
Co			0.29	0.20	0.03	0.71	0.09	0.02	0.12	0.00	0.01	0.00	0.08	0.03	0.08	0.01	0.01
Cu				0.19	0.66	0.20	0.62	0.22	0.67	0.02	0.08	0.05	0.03	0.13	0.02	0.02	0.05
Fe					0.09	0.26	0.12	0.07	0.11	0.08	0.02	0.03	0.07	0.03	0.11	0.08	0.04
Mo						0.03	0.31	0.32	0.31	0.03	0.12	0.05	0.00	0.15	0.01	0.03	0.12
Ni							0.04	0.01	0.04	0.02	0.00	0.02	0.15	0.02	0.15	0.02	0.02
Pb								0.19	0.83	0.01	0.08	0.06	0.03	0.19	0.03	0.04	0.06
W									0.14	0.03	0.07	0.04	0.00	0.14	0.00	0.08	0.22
Zn										0.01	0.07	0.06	0.04	0.18	0.05	0.04	0.06
Zr											0.01	0.07	0.03	0.02	0.06	0.28	0.10
Hg												0.03	0.05	0.54	0.04	0.00	0.00
Li													0.00	0.03	0.02	0.27	0.37
Pt														0.02	0.22	0.00	0.00
Sb															0.06	0.01	0.04
Cr																0.01	0.03
Nb																	0.23

Группы элементов, которые были выделены в Таблице значений для точных совпадений, в данном случае так же имеют высокие значения меры. Предварительный анализ Таблицы показывает, что группы элементов совпадают, однако точную картину можно получить, построив дендрограмму по описанному выше алгоритму. На рисунке 3.7 показано графическое представление результата анализа при использовании метода взвешенного попарного среднего.

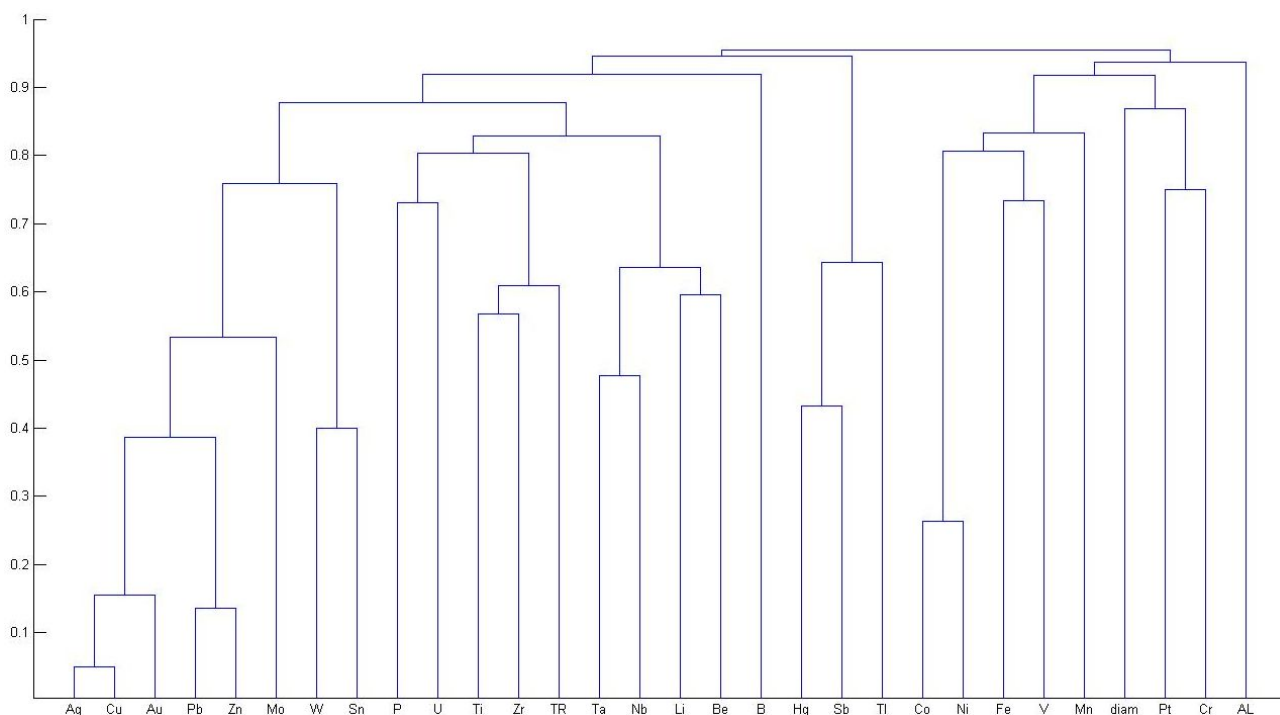


Рисунок 3.7 – Дендрограмма рудных компонент для расчетов близости в кругах радиуса около 220 км

В случае анализа совпадений расстояний в кругах радиусом 200 км, группы «родственных» элементов получаются несколько иными, чем для случая совпадения в точке. Группа Zn-Pb теперь действительно выделена отдельно, как и Ag-Au-Cu. На предыдущих дендрограммах, независимо от способа определения связи между элементами, эти группы выделялись на гораздо больших взаимных расстояниях. Группа Hg-Sb-Tl не изменилась, однако, опустилась «ниже» в общей дендрограмме, это показывает усиление «близости» при изменении способа рассмотрения совпадения элементов. Подобие результатов при рассмотрении обычных и «генерализованных» месторождений также свидетельствует в пользу объективности и робастности основных результатов получаемой кластеризации.

3.2.1 Выявленные зависимости, обсуждение

С точки зрения неорганической химии выделяемые группы элементов можно объяснить с применением нескольких понятий и точек зрения, однако это можно сделать не всегда с применением только одного набора характеристик. Попробуем описать общие

тенденции полученной дендрограммы, принимая во внимание химическую природу исследуемых элементов.

Ag, Au и Cu находятся не только в одной группе, но и в одной подгруппе периодической системы элементов Д.И. Менделеева. Серебро и золото имеют большой потенциал ионизации и поэтому встречаются в свободном виде. Более того, они имеют одинаковую металлическую решетку. Металлической меди немного меньше, она встречается реже, однако там, где она есть металлическая, она относительно инертна.

Pb и Zn имеют двухзарядные катионы, и сопоставимые ионные радиусы. Поэтому они имеют аналогичные свойства при связывании с другими элементами полярными и ионными связями. В том числе, они имеют сопоставимую растворимость в широких диапазонах температур, давлений и составов растворителей (что так же подтверждается химической практикой).

Mo и W находятся в одной группе и одной подгруппе, но в первую очередь были бы ближе с точки зрения заряда. Они являются жесткими кислотами Льюиса [Pearson 1963], представлены в основном в форме аниона. Появление Sn в этой группе нетривиально и требует дополнительного объяснения.

P и U связаны в одну группу на достаточно высоком уровне, с точки зрения неорганической химии между этими элементами связь неочевидна.

Ti и Zr в таблице Менделеева находятся в одной и той же группе и подгруппе. Имеют одинаковый заряд (4), являются жесткими кислотами Льюиса, присутствуют в форме аниона. TR, особенно лантаноиды, являются жесткими катионами (в следствии того, что заряд меньше).

Nb и Ta находятся в одной группе и одной подгруппе и, как следствие, обладают схожими свойствами, одинаковые степени окисления. Оба элемента образуют анионные решетки.

Li и Be имеют относительно близкий радиус катиона, наименьший среди металлов. Являются жесткими кислотами (хотя эффективное отношение заряда к радиусу у них различается в несколько раз). Могут кристаллизоваться в похожих решетках.

Hg, Sb и Tl являются относительно мягкими ионами, поэтому наиболее прочное связывание происходит с такими анионами, как сульфиды, сульфиты, селениды, галогениды.

Co и Ni хотя и находятся в разных подгруппах одной группы, тем не менее очень близки по своим свойствам и способности образовывать устойчивые соединения с одними и теми же реагентами, имеют схожий ионный радиус. Их разделение с точки зрения

классической неинструментальной аналитической химии традиционно является сложной задачей.

Fe хотя и относится к той же подгруппе, что и Co Ni, однако, по свойствам чаще бывает ближе к Mn, что так же отображено на дендрограмме.

То есть, можно заключить, что с точки зрения неорганической химии, генетическая связь элементов на дендрограмме подтверждается, когда эта связь обнаруживается на высоте не более ~ 0.7 единиц. В этих случаях видна взаимосвязь элементов, не прибегая к сложным описаниям кристаллических решеток, всевозможных коэффициентов диссоциации и произведениям растворимости при нестандартных условиях для соответствующих вмещающих минералов. Более того, основная масса рассмотренных элементов близких на дендрограмме, находятся в одной группе в таблице Менделеева, что непосредственно связано с их атомно-электронным строением.

На дендрограмме так же видны элементы, стоящие особняком, и «примыкающих» к общей системе классификации только на расстояниях порядка 0.9 единиц, особенно отметим поведение алмаза и Al.

Происхождение алмазов связано с наиболее глубинными процессами в недрах мантии (чем они отличаются от подавляющего большинства рудных месторождений, которые имеют коровую природу). При этом это обычно достаточно древние месторождения, которые не приурочены в большинстве случаев к современным тектоническим формациям. При рассмотрении фрактальных размерностей распределения алмазов было подсчитано значение 0.3-0.4 для корреляционной фрактальной размерности D_2 , что соответствует практически «точечному» распределению (подробнее это обсуждается в главе 2). На дендрограмме они объединяются с другими видами сырья только на максимальных значениях «расстояния» при значении $R=0.998$.

Алюминиевые руды, бокситы сами по себе имеют отдельный, экзогенный седиментационный режим формирования и распространены достаточно хорошо в достаточных концентрациях. Однако технология получения Al заключается в электролизе его раствора в виде фторидного комплекса и сопряжена с расходом большого количества электрической энергии, поэтому, из экономических соображений, мы можем ожидать приуроченность крупных месторождений к близким источникам дешевой электроэнергии, таким как гидроэлектростанции. В данном случае мы имеем пример отмеченной выше возможности экономической, а не геолого-тектонической приуроченности месторождений.

Как продолжение этого предположения, можно изучить согласованное распределение этих месторождений и гидроэлектростанций, или, проще говоря, рек.

Таким образом, мы видим, что распределения месторождений и компонент в месторождениях есть результат подчас разнонаправленных и разных по своей сути процессов (химических, геотектонических и прочих). А сбор и представление данных увеличивает погрешность в те цифры, которые берутся за основу в предлагаемом исследовании. Например, понятие точной координаты не применимо к реальным месторождениям, так как эти объекты не являются точками. Представленные координаты в ГИС КСКМ могут быть центром групп разрабатываемых месторождений. Подробные рассуждения на ограничения понятия “координаты месторождения” оговорены в главе 1. Аналогично, некоторая неточность также присутствует в понятии наличия или отсутствия компонент. Мы можем представить, что распространенные элементы (например, Al) могут встречаться в других месторождениях, однако при отсутствии соответствующей инфраструктуры они не будут добываться и их наличие не будет отражено в исследуемой ГИС КСКМ. Есть также некоторая неполнота сведений о месторождениях в виду того, что некоторые из них еще не открыты или их объемы (в силу ряда причин) указаны неверно. Несмотря на это, можно считать успехом получившиеся ветвления: правильно подобранный математический алгоритм и кропотливая работа по сбору, уточнению данных в ГИС КСКМ показали глубокую генетическую связь между элементами месторождений не прибегая к помощи экспертных оценок, что являлось одной из задач работы.

3.2.2 Возможные графические представления дендрограммы

Расстояния на оси ординат на дендрограмме представлены в линейном виде. Для изменения удельного веса высот можно определить расстояние R Танимото, как логарифм меры Танимото-Роджерса. Однако, такое представление почти никак не отражается на графическом результате (рисунок 3.8). В случае Fe-Mn это могло бы помочь лучше проследить их «относительную» близость, чем это визуально представлено на диаграмме.

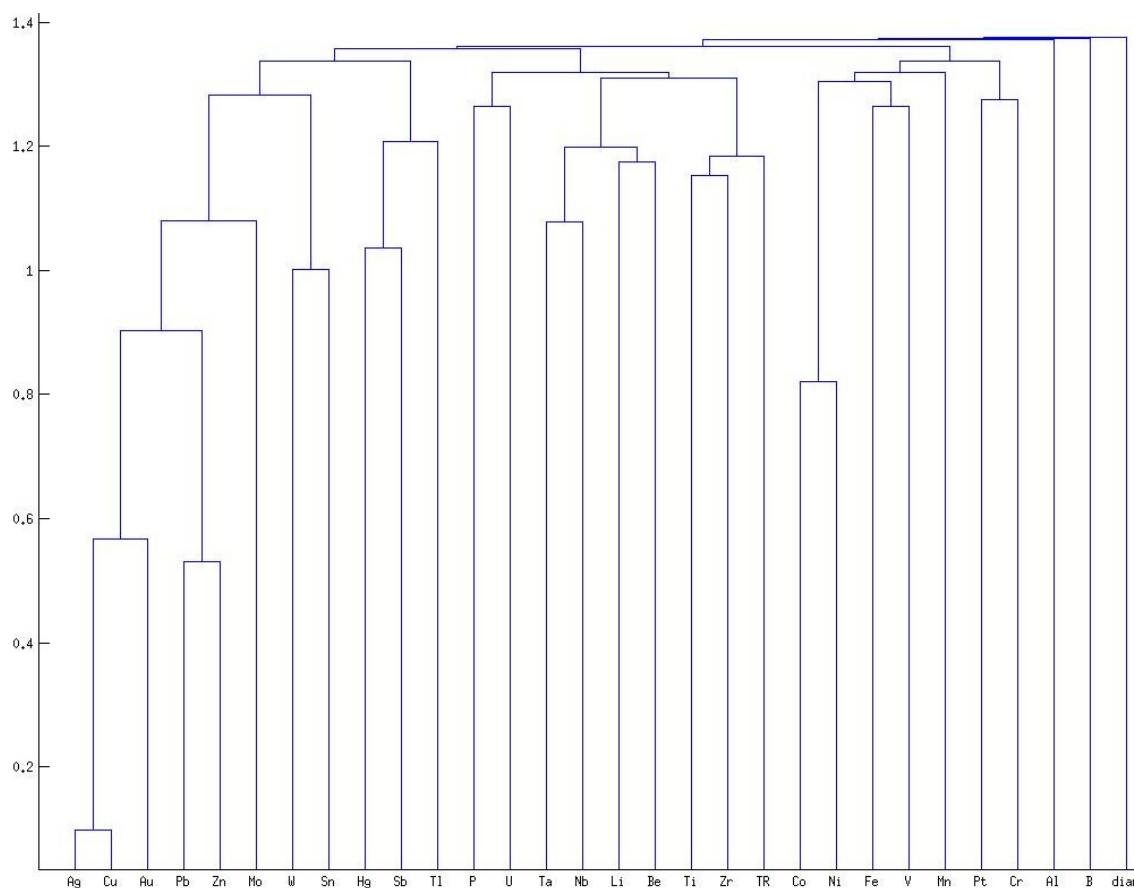


Рисунок 3.8 – Использование логарифма меры Танимото-Роджерса для построения дендрограммы

Выше уже были описаны нетривиальные случаи графического представления дендрограммы, когда за основу построения расстояний использовали центроидные методы (взвешенный и невзвешенный). Несмотря на нетривиальный вид, общие черты генетических связей сохраняются, и, более того, могут быть обнаружены те связи, которые не были выявлены, однако ожидалось с точки зрения химической близости элементов. Так, Fe-Mn, хотя по-прежнему отстоят друг от друга на несколько сотых единиц, теперь не разделены связью с V и находятся в одной группе.

Увеличение радиуса поиска вокруг каждого месторождения увеличивает данные для анализа с одной стороны, с другой – искажает данные, за счет «накопления лишних» элементов, не относящихся к одному и тому же месторождению. Так, при увеличении радиуса поиска до 350 км, ветвления на дендрограмме (рисунок 3.9) имеют большие значения, а принципиально новых групп не появляется.

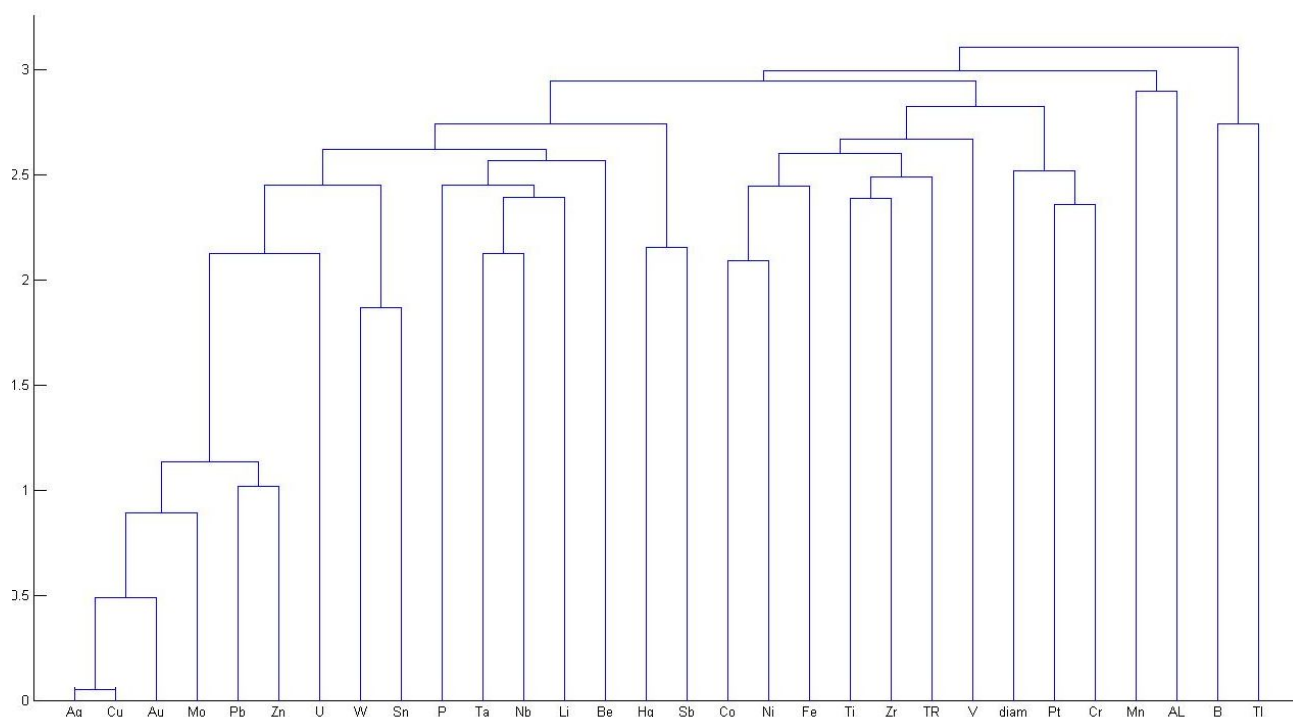


Рисунок 3.9 – Дендрограмма компонент рудных месторождений при подсчете меры Танимото-Роджерса в кругах радиусом 350 км

Таким образом, можно сказать, что возможные «погрешности» в указании географических координат меньше 350 км. Такова полученная формальная оценка типичного размера рудоносных провинций.

3.3 Классификация компонент рудных месторождений

Выше уже была охарактеризована разница между классификацией и кластеризацией. Напомним, что алгоритмы кластеризации, как правило, оставляют свободу выбора числа кластеров, и только позволяют получить оптимальный вариант разбиения элементов множества по кластерам для заданного числа кластеров [Jain, 1999]. Такая неоднозначность выбора имеет место и в нашем случае. Как результат кластеризации может рассматриваться любой из вариантов разбиения, отвечающих некоторому заданному значению расстояния Танимото R. Однако в случае большого числа кластеров, такие разбиения, видимо, не представляют интереса, потому как в таком случае большая часть рудных компонент оказываются не объединенными ни в один из кластеров. Аналогичным образом, менее информативны оказываются и варианты разбиения на малое число кластеров (на 2 или 3

кластера). В таком случае неинформативность связана с тем, что до самого завершения процесса кластеризации сохраняются два микро-кластера, образованные только двумя компонентами: Al и алмазами. При этом все остальные виды сырья оказываются объединенными в единый кластер, что также неинформативно. Компромиссным вариантом, по-видимому, может быть вариант разбиения на небольшое число кластеров от 5 до 15 штук. Это может быть также косвенно подтверждено графическим представлением зависимости числа кластеров K от величин расстояния Танимото R (рисунок 3.10).

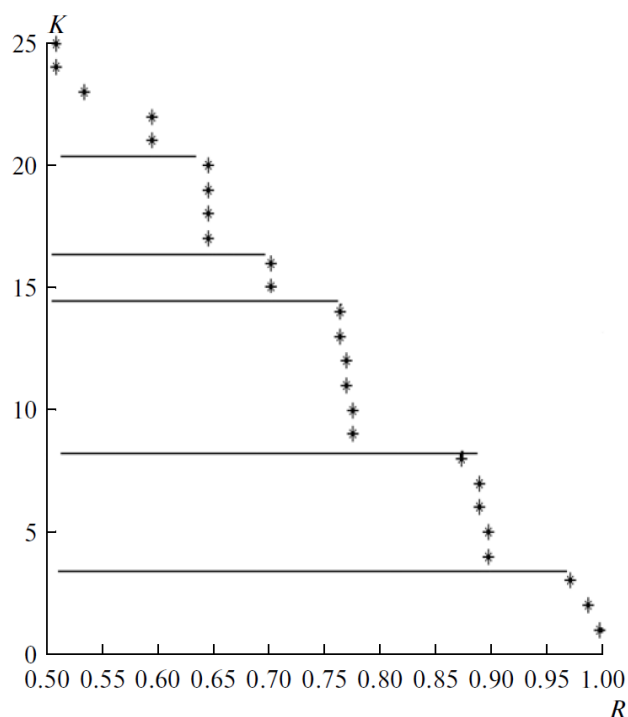


Рисунок – 3.10 Зависимость числа кластеров K от величин расстояния Танимото R . Звездочками отмечены точки объединения нижних кластеров в верхние, образующиеся с ростом R . Горизонтальные линии — диапазоны устойчивости схемы кластеризации с изменением величин расстояния R

На графике можно достоверно наблюдать, что объединение кластеров происходит с ростом взаимного расстояния Танимото R весьма неравномерно, ступенчато. В относительно узких интервалах значений R происходит объединение сразу нескольких кластеров, затем можно наблюдать интервалы расстояний R , когда объединения в кластеры не происходит. Укажем эти интервалы значений R отдельно, они равны: 0.6–0.63, 0.65–0.7, 0.71–0.76, 0.78–0.86 и 0.9–0.96; при значениях R в этих, относительно широких диапазонах, число кластеров сохраняется

равным 20, 16, 14, 8 и 4 соответственно. Интервалы объединения кластеров в группы показаны на рисунке 3.10 горизонтальными линиями, всего можно выделить шесть ступеней классификации. Поэтапное объединение сразу нескольких кластеров при переходе на следующий уровень является признаком иерархичности. Наличие такого четкого разделения косвенно подтверждает существование нескольких иерархических уровней. В зависимости от расчетов мер Танимото и, соответственно, расстояния R , уровни классификации будут также меняться (рисунок 3.6), поэтому объединение соседних по расстоянию уровней в один, для целей выделения типов классификации может быть оправдано. Однако, такие обобщения имели бы больший смысл если помимо исключительно классификационных целей, подобная структура согласовывалась с моделями рудообразования. В последней главе приведена попытка выявления нескольких групп в рамках предварительной общей модели рудообразования, однако такая модель не предполагает деления на все группы кластеров, получившихся при проводимой классификации.

3.4 Выводы к главе 3

Использование формальной метрики применительно к данным о совместной встречаемости рудных компонент в ГИС КСКМ позволяет ввести некоторое расстояние в пространстве смысловой близости рудных компонент и провести их кластеризацию и классификацию, согласующуюся с известными закономерностями [Родкин, 2015]. Такой формальный подход, возможно с некоторыми оговорками, может быть использован на других, более детальных и специфических баз данных, и служить существенным дополнением к экспертным оценкам в вопросах классификации рудных компонент и месторождений. Предварительная оценка применимости метода для случая вычисления мер Танимото-Роджерса «в точке» указывает на робастность выделения кластеров на высотах расстояний до 0,7 единиц. В случае, когда необходимо расширить применение метода, рассчитывать меры Танимото-Роджерса допустимо, однако с увеличением радиуса включения соседних месторождений, происходит накопление лишних связей, что приводит к образованию достаточно «высоких», с точки зрения объединения на дендрограмме, групп. В случае небольшого (как в случае алмазов) набора месторождений была бы уместна дополнительная работа по статистической предварительной обработке исследуемой выборки месторождений, например, попытка расширения исследуемой базы или уточнения уже имеющихся данных. Такой глубокой проработки исследуемой ГИС КСКМ не проводилось, так как помимо

отработки и демонстрации применимости метода, задачи выявления детального вычисления мер Танимото-Роджерса специальных элементов рудных месторождений не стояло. Интересным развитием метода могла бы быть попытка подбора оптимальных уровней кластеризации. Даже предварительное выделение групп кластеризации показывает наличие обоснованных уровней, подробная интерпретация которых могла бы выявить дополнительные глубинные связи между элементами месторождений.

ГЛАВА 4. СОГЛАСОВАННОСТЬ ОЦЕНОК МЕР БЛИЗОСТИ ГРУПП РУДНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА РАСЧЕТА СМЕШАННОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ РАЗМЕРНОСТИ И РАСЧЕТОВ НА ОСНОВЕ МЕРЫ БЛИЗОСТИ ТАНИМОТО-РОДЖЕРСА

4.1 Согласованность двух методов

4.1.1 Фрактальная размерность и мера Танимото-Роджерса

В предыдущих 2 главах были рассмотрены 2 новых (по отношению к анализу рудных месторождений) подхода. В каждом подходе помимо анализа самого метода, была показана согласованность с уже известными данными в других областях науки. Так, в случае кластеризации, получившиеся группы компонентов месторождений содержат элементы, близкие по своим химическим свойствам. Если рассматривать геологические процессы, как реализацию схемы проточного химического реактора, где происходят процессы превращения и концентрирования соединений - компонент запасов месторождений, то логично было бы ожидать, что атомы, ионы или группы ионов, обладающие одинаковыми физико-химическими свойствами (и, в конечном счете, такими как ионный / атомный радиус, координационные числа, потенциалы ионизации и т.д.) будут концентрироваться и / или кристаллизоваться в одинаковых условиях. В случае рассмотрения фрактальной размерности, было показано, что значения смешанной корреляционной размерности D_2 соответствуют представлениям об условиях (схожих или различных) образования месторождений тех или иных компонент. В этой главе мы исследуем согласованность результатов этих методов между собой. При расчетах меры близости Т-Р и фрактальной размерности D_2 используются не только различные методологические подходы, но и разные наборы данных о месторождениях [Родкин, 2012]. В первом случае (расчета меры Т-Р) это набор представленных в месторождении рудных компонент. Во втором (метод расчета D_2) – координаты месторождений, содержащих данные компоненты. Тем не менее, эти данные могут

характеризовать одну и ту же особенность – большую или меньшую степень близости рассматриваемых групп месторождений друг к другу. Действительно, если два вида руд, например, Au и Ag, систематически встречаются в одних и тех же месторождениях, то можно говорить о высокой степени близости месторождений Au и Ag друг к другу. Аналогично можно говорить о близости двух групп месторождений, если эти месторождения имеют тенденцию располагаться поблизости друг от друга [Родкин, 2011]. Однако в предлагаемой работе показана именно численная мера близости рудных компонент, которая рассчитывается напрямую из данных ГИС КСКМ, не учитывая оценки экспертов.

Описанные соображения позволяют заключить, что численные характеристики, получаемые разными методами, могут коррелировать. Первая качественная попытка объединения двух методов была показана в Главе 2 (рисунки 2.18 и 2.19), однако в ней мы ограничились только общим наблюдением, что близкие элементы или группы элементов показывают низкие значения корреляционной размерности.

Использованное нами ограничение малости взаимных расстояний при расчетах корреляционной размерности обусловлено, в том числе, необходимостью рассмотрения близкого пространственного диапазона при сравнении со случаем расчета меры Т-Р (в этом случае рассматриваются как бы нулевые взаимные расстояния, так как оценивается вероятность сонахождения разных видов рудного сырья в одних и тех же месторождениях, возможность рассмотрения меры Т-Р в кругах определенных радиусов обсуждалась в Главе 3).

Правомочность предложенной интерпретации подкрепляется данными рисунка 4.1, где показана связь рассчитанных значений меры близости Танимото-Роджерса и величин корреляционной размерности D_2 на малых расстояниях. Повышенные значения меры Т-Р, соответствующие частой встречаемости разных компонент в одних и тех же месторождениях, отвечают малым значениям корреляционной размерности $D_2 \cong 0$. И наоборот, парам элементов с отсутствием случаев сонахождения в общих месторождениях (мера $T = 0$) отвечают большие значения корреляционной фрактальной размерности D_2 .

Значимость выявленной тесной корреляции величин близости Роджерса-Танимото и величин смешанной корреляционной размерности представляется тем более убедительным, что, как легко видеть, при расчетах меры близости Т-Р и фрактальной размерности D_2 используются не только различные методологические подходы, но и разные наборы данных о месторождениях. Тем не менее, как видно из рисунка 4.1, эти данные характеризуют одну и ту же особенность – большую или меньшую степень близости рассматриваемых групп

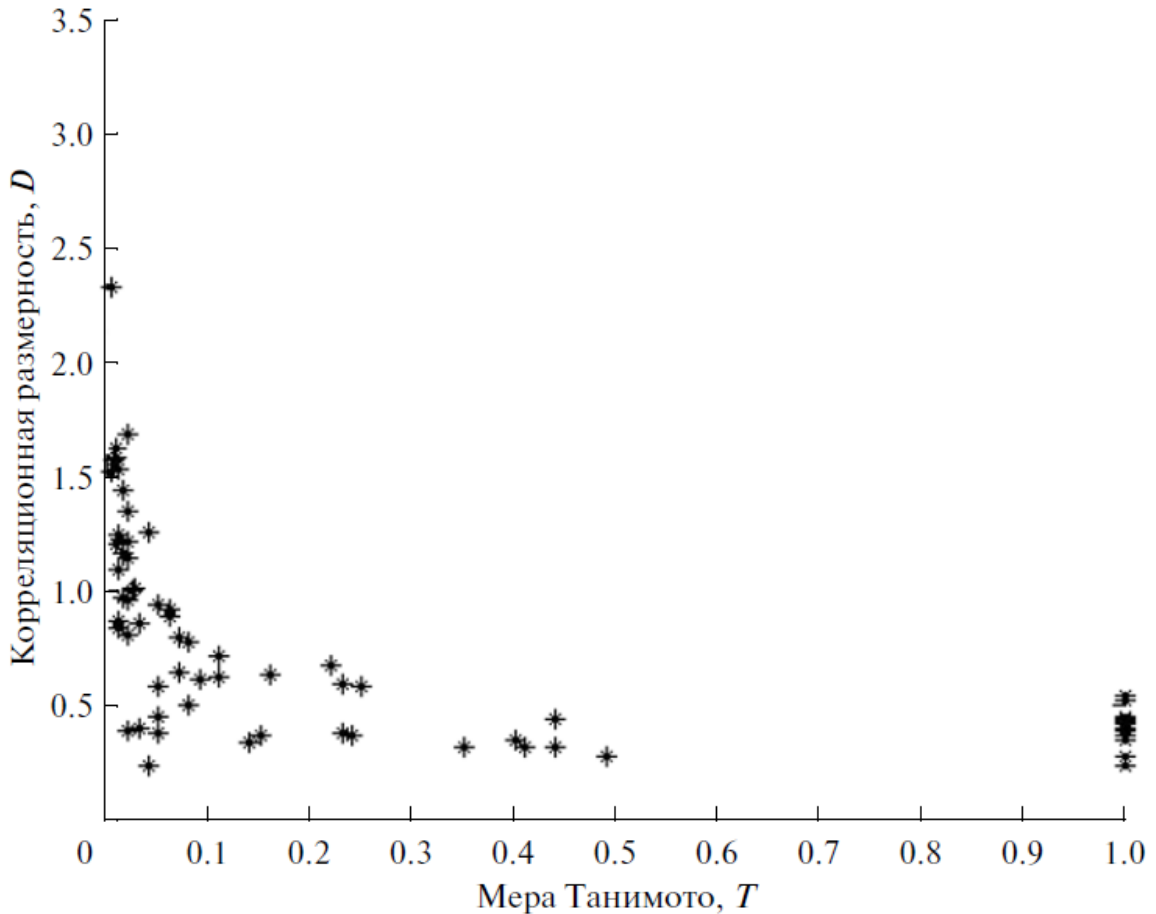


Рисунок 4.1 – График связи меры Танимото-Роджерса и фрактальной размерности

месторождений друг к другу. Две независимые меры близости оказались тесно взаимно коррелированы.

Полученное косвенное подтверждение допустимости использования предложенных методов может быть использовано для обоснования введения некоторого обобщенного параметра для построения классификации.

4.1.2 Кластеризация на основе обобщенного расстояния

Одним из следствий введения мер расстояния как характеристики взаимной близости рудных компонент в предыдущих главах было построение кластеров и их графического представления в виде дендрограмм. В этих случаях использованные меры являлись характеристиками некоего расстояния в «смысловом» пространстве: мера Т-Р не подразумевала расстояния на плоскости Земли и никак с ней не связана. Кроме тех случаев,

когда совпадение двух типов сырья рассматривалось не в одном, а в соседних месторождениях (в кругах заданного радиуса), однако сама мера не показывала расстояния между месторождениями. Другая используемая величина, фрактальная размерность, в некотором смысле опирается на понимание расстояния в привычном смысле, но по сути таковым не является. Эта величина показывает определенную приуроченность к точечным, линейным или площадным распределениям исследуемых объектов. Ее введение было обосновано именно попыткой отхода от простого описания приуроченности месторождений в смысле их географического расстояния и переходом к некой обобщенной характеристике. В случае смешанной корреляционной размерности, как было показано ранее, получаемая оценка величин корреляционной размерности как малых значений свидетельствует о взаимной приуроченности месторождений различного сырья и, возможно, схожими условиями их образования.

Поскольку обе величины являются неким расстоянием в пространстве взаимной близости рудных компонент, следующим обобщением могла бы быть попытка построения обобщенного расстояния, которое учитывало бы обе характеристики. Очевидно, что поскольку сама мера Танимото-Роджерса и величина фрактальной размерности фактически не являются географическими расстояниями, обобщенное расстояние им также не является. Поскольку в задачи данной работы не входила попытка выяснения удельного веса каждой из предложенных характеристик в общей картине распределения месторождений и их компонент, для самого первого опыта такого сопоставления мы предположим, что они равнозначны.

Для приведения данных к общему виду необходимо произвести нормировку значений смешанной корреляционной размерности по максимальному в таблице 2.2. Количество исследуемых компонент в ней равно 13, - это те элементы, которые наиболее полно описаны в исследуемой БД (больше 75 упоминаний), к которым добавлены алмазы, как особый вид сырья (по аналогии с исследованием меры Т-Р). Диагональные элементы в нашем случае должны быть обнулены (расстояния между одинаковыми элементами должно быть равно нулю) Полученные таким образом значения представлены в таблице 4.1. Для сопоставления выберем из полученных таблиц мер Т-Р те же пары элементов. Выбор формулы расчета расстояния R_{TD} в данном случае мог бы быть обоснован соображениями удобства использования: распространенная и привычная формула расстояния в евклидовом пространстве:

$$R_{TD} = \sqrt{T^2 + D_{2M}^2} \quad (4.2)$$

где T^2 – квадрат меры Т-Р, D_{2M}^2 - квадрат смешанной корреляционной размерности, может являться характеристикой веса ребер между узлами кластера, состоящего из компонент месторождений.

Таблица 4.1 – Диагональная матрица для построения дендрограммы со значениями смешанной фрактальной размерности выбранного набора элементов

	Au	Ag	Cu	Co	Fe	Mo	Ni	P	Pb	Sn	U	Zn	ал-ма-зы
Au	0.00	0.10	0.10	0.12	0.26	0.11	0.13	0.75	0.12	0.27	0.19	0.12	0.47
Ag		0.00	0.10	0.07	0.28	0.12	0.12	1.00	0.09	0.14	0.37	0.09	0.49
Cu			0.00	0.20	0.39	0.21	0.20	0.49	0.19	0.21	0.46	0.19	0.63
Co				0.00	0.16	0.50	0.11	0.52	0.32	0.51	0.32	0.27	0.41
Fe					0.00	0.52	0.20	0.30	0.40	0.37	0.54	0.37	0.47
Mo						0.00	0.59	0.65	0.29	0.40	0.43	0.29	0.41
Ni							0.00	0.44	0.38	0.47	0.31	0.35	0.65
P								0.00	0.55	0.48	0.23	0.51	0.31
Pb									0.00	0.25	0.49	0.14	0.93
Sn										0.00	0.37	0.25	0.37
U											0.00	0.51	0.50
Zn												0.00	0.75
алмазы													0.00

Полученные значения расстояния R_{TD} представлены в таблице 4.2. Как и в случае мер Т-Р эта матрица имеет диагональный вид и обнаруживает привычные группы элементов Ag+Au+Cu и другие. На рисунке 4.2 представлено ветвление исследуемых элементов, построенное методами, описанными в предыдущих главах.

Полученное ветвление ограничено по количеству рассматриваемых элементов, однако общие тенденции, замеченные ранее, сохраняются. При рассмотрении дендрограмм в предыдущих главах (рисунки 3.5 и 2.23) выделявшаяся группа элементов: {Au+Ag, Pb+Zn, Cu} представлена тем же составом. Sn+Mo образуют соседнюю группу. Вместе они образуют большой кластер. Другой большой кластер состоит из Co+Ni, которые ранее выделялись в общую группу, а также отдельного элемента – Fe. Чем больше расстояние, тем, в данном случае, оно менее информативно, вследствие постепенного накопления ошибок.

Таблица 4.2 – Диагональная матрица для построения дендрограммы со обобщенного расстояния R_{TD} для выбранного набора элементов. Выделены значения больше 0.42 единиц

	Au	Ag	Cu	Co	Fe	Mo	Ni	P	Pb	Sn	U	Zn	алмазы
Au	0.000	0.163	0.214	0.463	0.515	0.374	0.473	0.776	0.303	0.524	0.472	0.295	0.613
Ag		0.000	0.180	0.468	0.530	0.368	0.490	1.000	0.135	0.458	0.550	0.134	0.619
Cu			0.000	0.374	0.558	0.329	0.434	0.616	0.312	0.456	0.593	0.299	0.701
Co				0.000	0.432	0.620	0.184	0.633	0.526	0.630	0.527	0.507	0.583
Fe					0.000	0.627	0.414	0.501	0.566	0.567	0.630	0.553	0.611
Mo						0.000	0.676	0.710	0.489	0.542	0.571	0.479	0.585
Ni							0.000	0.598	0.566	0.609	0.525	0.549	0.714
P								0.000	0.650	0.614	0.422	0.630	0.532
Pb									0.000	0.477	0.609	0.165	0.935
Sn										0.000	0.569	0.455	0.569
U											0.000	0.621	0.625
Zn												0.000	0.781
алмазы													0.000

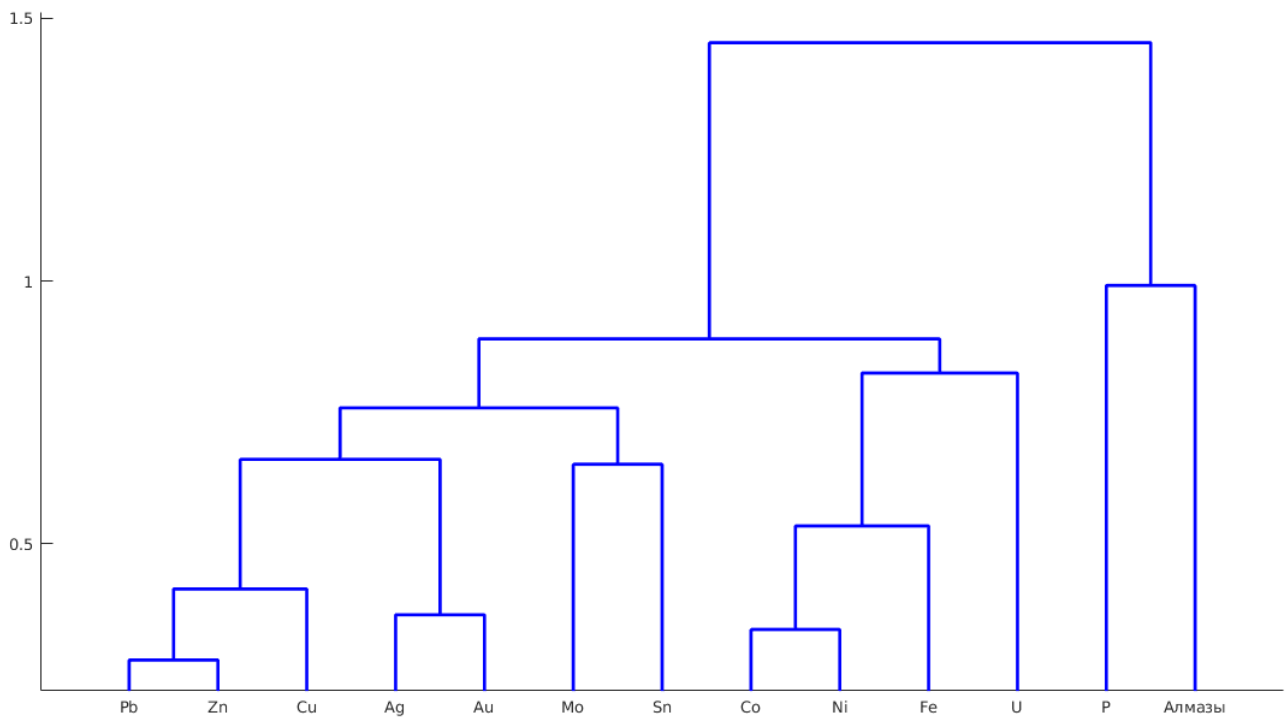


Рисунок 4.2 – Дендрограмма, построенная на основании обобщенного расстояния R_{TD}

Можно качественно оценить этот рубеж величиной равной 1: все, что выше этого значения, попадает в одну ступень классификации. Действительно, алмазы скорее всего не находятся в одной группе с другими элементами (такими как фосфор, например), а составляют обособленный кластер, равноудаленный от остальных больших скоплений. В таком случае, обратившись к рисункам 3.5 и 3.6 можно проследить некую тенденцию обособления фосфора и урана в отдельную группу, объединяющуюся только на самых максимальных значениях расстояний. Вероятнее всего, отнесение их в одну или в разные группы не может быть оправдано с точки зрения предложенного подхода: объединение урана с группой {Co+Ni, Fe} на рисунках 4.2 и 3.5 происходит на больших расстояниях, близких к единице.

Полученная классификация указывает на робастность предложенных методов и могла бы быть расширена с введением дополнительных значений расстояний по мере использования все большего объема фактического материала. Повторимся, что используемые методы универсальны и не привязаны только к одному типу данных, а показанная внутренняя связь между двумя разными методами косвенно подтверждает их легитимность.

4.2 Геологическая интерпретация результатов

4.2.1 Моделирование механизма формирования месторождений - некоторые предварительные общие схемы

В главе 1 была рассмотрена природа распределений концентраций и объемов месторождений. Подтверждена возможность описания эмпирических распределений величин запасов – степенным, а значений концентрации – логнормальным законом распределения (таблица 1.2). Продемонстрированы признаки неравновесной природы процесса формирования месторождений (по данным таблицы 1.1). Перейдем к рассмотрению возможных механизмов, порождающих выявленные распределения. Возможным простым и правдоподобным механизмом представляется вариант схемы реализации логнормального закона распределения для величин концентрации и степенного закона для величин запасов месторождений при формировании месторождений в ходе развития глубинных надвигов. Естественно, не предполагается универсальность такой схемы, а только ее возможность для некоторых типов месторождений.

Логнормальный закон распределения величин концентраций представляется естественным трактовать как следствие формирования месторождений в результате серии

последовательных независимых эпизодов концентрирования рудной компоненты. Как привычный всем нормальный закон распределения получается при суммировании независимых случайных факторов, так логнормальный возникает при их перемножении. В нашем случае логнормальный закон естественным образом возникает как результат перемножения различных случайных коэффициентов обогащения на каждом из этапов процесса обогащения. Отметим, что полистадийность процессов формирования крупных месторождений, типичность их образования в ходе нескольких процессов обогащения, отмечается в обобщающей многотомной монографии, вышедшей в 2006 году под редакцией академика Д.В.Рундквиста [Крупные и суперкрупные..., 2006] как характерная черта процессов рудогенеза. Отметим также получаемые в результате огромные значения обогащения, превышающие кларковые содержания элементов в 10^{10} - 10^{12} раз [Laznichka, 1999].

Перейдем к обсуждению более сложного и интересного случая возможного механизма реализации степенного закона распределения для величин запасов месторождений. Прежде всего, сам факт применимости степенного закона распределения весомо подкрепляет сделанное выше предположение о динамическом характере рудообразующей системы. Действительно, реализацию степенного закона распределения принято полагать характерным признаком именно динамических существенно неравновесных систем.

Для случая землетрясений естественной предельно простой моделью реализации степенного закона распределения является модель лавинообразного процесса развития сейсмогенной трещины в течение случайного интервала времени (пока трещина не упрется в препятствие). Лавинообразность развития сейсмогенерирующей трещины хорошо отвечает природе землетрясения как процессу разрушения материала по некоторому разлому. Действительно, чем длиннее трещина (уже вскрытый сегмент разлома), тем на большее расстояние распространяется вызываемая ею концентрация напряжений на краях трещины, и тем на большее расстояние трещина распространится на следующем этапе своего развития. Несмотря на свою простоту, такая масштабно инвариантная модель довольно информативна. Она не только поясняет происхождение закона Гутенберга-Рихтера, но и моделирует известную эмпирическую тенденцию, состоящую в том, что возникновению сильного землетрясения отвечают пониженные значения наклона графика повторяемости землетрясений.

Для случая месторождений нефти и газа можно предложить в значительной мере аналогичную модель лавинообразного развития. А именно, предполагая формирование степенного закона распределения в результате множества случайных по длительности

эпизодов (квази)лавинообразного заполнения потенциальных ловушек углеводородов. В пользу правдоподобности такого режима формирования УВ месторождений свидетельствует эффект их современного пополнения. Так в Татарстане, из глубоких месторождений в кристаллических (а не осадочных) породах уже выкачены объемы нефти, значительно превышающие первоначально оцененные объемы запасов. Показателен пример и чеченских месторождений. Некоторые из них (в том числе неглубокие) казались полностью выкаченными в результате десятилетий разработки. Однако, за время военных событий, многие такие заброшенные скважины заново наполнились нефтью. Оцененная скорость пополнения углеводородных месторождений, в среднем, оказалась примерно пропорциональной объему их запасов; то есть, месторождения с большим объемом запасов подпитываются, в среднем, более интенсивно. Важно, что такая - эмпирически выявленная тенденция скорости пополнения запасов месторождений - оказалась именно такой, какая нужна, чтобы в результате реализовался степенной закон распределения числа месторождений от объема запасов.

Для случая рудных месторождений академиком Л.И.Красным с соавторами [Красный, 2008] также приводились свидетельства их современного пополнения. В целом, однако, механизм быстрого (в геологическом смысле) и лавинообразного формирования рудных месторождений вряд ли может считаться типичным. Поэтому в качестве наиболее вероятного механизма была предложена несколько иная модель, когда распределение объемов запасов в месторождениях задается распределением объемов горных пород, вовлеченных и те или иные тектонические процессы.

На рисунке 4.3 показана тесная связь значений разницы средней концентрации различных элементов в среднем химическом составе верхней и нижней коры по данным известной монографии Тейлора и Мак-Леннана [Тейлор, 1988] с характерными значениями запасов месторождений соответствующего элемента, по материалам [Крупные и суперкрупные..., 2006]. Разным цветом обозначены компоненты с относительным обогащением в верхней или нижней коре. Коэффициент корреляции разности концентраций и характерных величин запасов крупных месторождений оказался очень высоким, $r = 0.98$, в то время как корреляция со значениями концентрации соответствующих компонент в верхней и нижней коре по отдельности несколько меньше. Такая корреляция является указанием, что решающую роль играет именно разность концентраций в верхней и нижней коре, а не среднее содержание соответствующего элемента в земной коре (корреляция величин запасов

месторождений со средней концентрацией элементов в верхней и нижней коре несколько ниже).

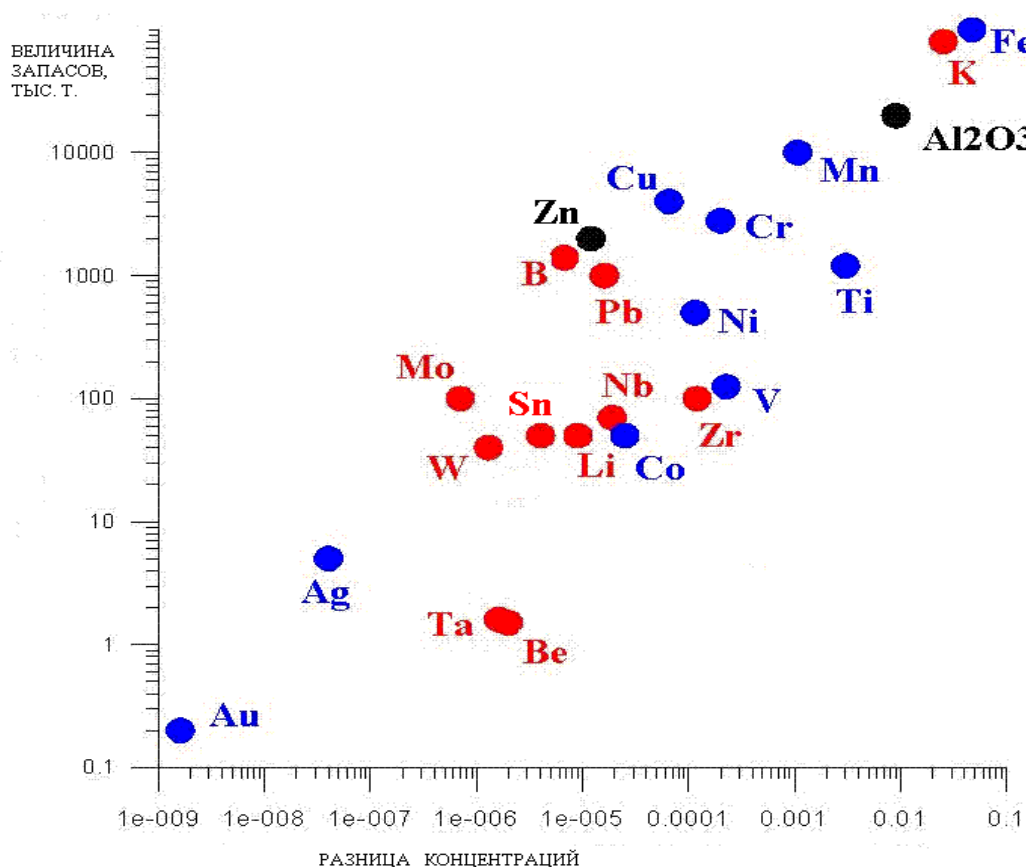


Рисунок 4.3 – Тесная связь разницы средней концентраций элементов в верхней и нижней коре с характерными значениями запасов крупных и суперкрупных месторождений (приведен случай крупных месторождений). Точки: красные — случаи обогащения (более двукратного) в верхней части коры (Ta, W, Pb, Sn, Zr, Nb, Mo, K, Li, Be, B); синие – случаи обогащения нижней коры (Ti, V, Cr, Mn, Fe, Co, Ni, Cu, Ag, Au); черные – без заметного обогащения (Al, Zn)

Неожиданно тесная эмпирическая связь (рисунок 4.3) дает основания предложить общий механизм формирования рудных месторождений, позволяющий объяснить отсутствие изначальных корней месторождений и при этом указать также и источник энергии для их формирования. Можно предположить, что формирование крупных рудных месторождений является следствием преобразования больших объемов земной коры из одного по составу резервуара земной коры в другой, скажем, из резервуара «нижняя кора» в «верхнюю кору» или наоборот [Родкинб 2013]. При этом излишние для новообразуемого резервуара элементы

(соединения) неизбежно отбрасываются, они и становятся исходным сырьем для формирования месторождений. Физическим механизмом концентрирования рудных компонент может быть при этом хорошо известный процесс отделения относительно менее совместимых компонент в процессах метаморфических превращений и/или плавления горных пород. Сам процесс при этом напоминает схему конвейера или работы обогатительного комбината. Ранее в главе 1 уже обсуждалось понятие проточного химического реактора как примера подобной схемы химического синтеза. При таких процессах все новые и новые порции вещества пересекают границы метаморфических превращений, на которых создаются условия отделения избыточных величин концентрации примесей, в частности, отделения несовместимых элементов [Урусов 1997]. Избыточные компоненты выносятся в растворенном виде или в расплаве и откладываются, формируя месторождения. При этом реализуются как многоэтапность процесса обогащения рудного вещества, так и условия формирования степенного закона распределения величин запасов.

Рассмотрим вариант такой модели на примере схемы глубинного надвига. При формировании месторождения в результате отделения избыточных примесей в ходе развития глубинного надвига потенциальная величина запасов пропорциональна произведению разницы концентраций рудного компонента в исходном и преобразованном веществе, мощности перерабатываемого слоя, амплитуды надвига и протяженности области сбора вещества по простиранию надвига. При этом по геологическим данным, мощность и амплитуда надвига положительно коррелированы, что создает предпосылки для формирования не логнормального, а степенного закона распределения. Аналогичный процесс, по-видимому, может реализоваться и при преобразовании вещества из нижней коры в верхнюю. В пользу такого предположения можно также привести данные о степенном распределении размеров террейнов [Захаров, 2013] и многих других характеристик литосферы. Можно предположить, что их масса, а значит и количество вещества, должно подчиняться этому распределению. При переработке вещества в некотором аналоге проточного химического реактора указанные свойства распределения наследуются в силу применимости законов химической кинетики и термодинамики (хотя и с некоторыми оговорками и в общем виде), изложенными ранее.

Другой вариант возникновения положительной обратной связи, необходимой для реализации степенного закона распределения величин запасов, реализуется в рамках модели формирования рудных месторождений потоками выявленных Д.С.Коржинским трансмагматических (проходящих через еще жидкие магмы) флюидов [Зотов, 1989]. Цепь

необходимой для реализации степенного распределения положительной обратной связи возникает в этой схеме за счет подогрева проходящими флюидами и тем самым повышения пропускной способности магматического канала разгрузки металлоносных флюидных потоков. Реализация такого механизма положительной обратной связи подкрепляется схемой на основе детальных данных по гигантским Pt-Pd-Cu-Ni месторождениям Норильского рудоносного узла (рисунок 4.4).



Рисунок 4.4 – Схема формирования гигантских Pt-Pd-Cu-Ni месторождений Норильского рудоносного узла [Зотов, 1989]

На схеме видны зоны концентрации интенсивности флюидных потоков в предположительно подплавленной матрице.

4.2.2 Обсуждение результатов кластеризации

В качестве наиболее устойчивых и потому предположительно более информативных вариантов разбиения естественно использовать варианты, отвечающие отмеченным на рисунке 3.9 интервалам значений расстояний R . В частности, интервалу R от 0.9 до 0.96, кроме кластеров, отвечающих Al и алмазам, соответствуют 4 крупных кластера составом: {Co, Fe, Ni, Mn}; {Ta, Li, Nb, Be, W, Sn}; {Ag, Zn, Pb, Au, Mo, Cu}; и {P, U, Ti, Zr, TR}. Обсудим это разбиение чуть более подробно.

Отметим, прежде всего, что первый из указанных кластеров {Co, Fe, Ni, Mn} целиком представлен элементами, относительно обогащенными в нижней континентальной коре, а второй кластер {Ta, Li, Nb, Be, W, Sn} – только элементами, обогащенными в верхней коре [Тейлор, 1988]. Такой подбор элементов (только из обогащенных в верхней или только в нижней коре) может сформироваться случайно с вероятностью около 12% в первом случае и лишь 3% - во втором. Отсюда более вероятным представляется предположить, что месторождения первого кластера возникали на основе пород нижней части континентальной коры при ее преобразовании в верхнюю кору, а второго - при обратном преобразовании вещества литосферы [Родкин 2010, 2011].

Отметим, что и приведенная в [Крупные и суперкрупные..., 2006] схема кластеризации также не вполне случайна по отношению к распределению элементов с обогащением в верхней или нижней коре, полученные авторами кластеры месторождений также часто отвечают резкому доминированию элементов с обогащением либо в верхней, либо в нижней континентальной коре. В обобщающей коллективной монографии по проблемам рудогенеза [Крупные и суперкрупные..., 2006] принята кластеризация рудных месторождений по их содержанию на 12 следующих групп: Au, Ag; PGE, Ni; Pb+Zn, Cu+Co; Sb, Hg; Sn, W, Mo; Li, Ta, Be, Nb, Zr, TR; Fe, Mn, Cr, V, Ti; Al; U; B, F, слюды; P, соли; алмазы. Проверим, согласуется ли принятая кластеризация месторождений с предложенной схемой их формирования в ходе преимущественно восходящих или нисходящих (в поле P-T условий) движений вещества земной коры. В таблице 4.3 даны списки групп с указанием (цветом, аналогично рисунку 4.3) отвечает ли данный компонент обогащению в верхней или в нижней коре соответственно. Видна определенная предрасположенность к подбору элементов с обогащением либо в верхней, либо в нижней континентальной коре.

Таблица 4.3 – Список групп месторождений с указанием характера обогащения: синим цветом даны элементы с обогащением в нижней коре; красным – в верхней; черным – при отсутствии данных и при незначительном (десятки процентов) обогащении

Номер группы	Список элементов в группе
1	Au, Ag
2	PGE (Pt, Ir, Os, Pd, Ru, Rh), Ni
3	Pb+Zn, Cu+Co
4	Sb, Hg
5	Sn, W, Mo
6	Li, Ta, Be, Nb, Zr, TR
7	Fe, Mn, Cr, V, Ti
8	Al
9	U
10	B, F, слюды
11	P, соли
12	Алмазы

Из таблицы 4.3 видно, что в подавляющем большинстве групп (кроме группы № 3) не встречается одновременного включения элементов, отвечающих разнонаправленным процессам преобразования вещества земной коры (с восходящим и с нисходящим потоком вещества). Отсюда можно заключить, что ранее предложенная в [Крупные и суперкрупные..., 2006] классификация месторождений по составу не противоречит предлагаемой нами новой схеме формирования месторождений.

4.3 Выводы к главе 4

Результаты кластеризации месторождений, полученные независимыми методами (на основе расчета смешанной корреляционной размерности и меры близости Танимото-Роджерса) и по независимым данным (по пространственному расположению и по наполнению рудных месторождений) оказались тесно коррелированными, что указывает на корректность обоих этих подходов, возможность проведения на их основе содержательной формальной

кластеризации компонент месторождений и на возможность получения общей классификации, путем объединения обоих этих подходов. Преимущество метода оценки близости компонент рудных месторождений на основе меры Танимото-Роджерса в сравнении с исследованием фрактальной размерности состоит в его меньшей чувствительности к объему данных при сохранении устойчивых и взаимосогласующихся результатов кластеризации.

Предложены меры близости на основе расчета смешанных корреляционных размерностей, на основе меры близости Танимото-Роджерса и их комбинации. Матрицы мер близости были использованы для проведения формальной кластеризации разных видов месторождений.

К новым результатам кластеризации можно отнести тенденцию частого выявления кластеров, составленных преимущественно из элементов с обогащением либо в верхней, либо в нижней континентальной коре. Выявленная корреляция свидетельствует в пользу важности для процессов формирования месторождений процессов преобразования вещества из резервуара «верхняя кора» в резервуар «нижняя кора» и обратно. В качестве гипотезы можно предположить, что месторождения формируются, в основном, за счет элементов с избыточной (при превращении между георезервуарами) плотности; такие элементы в большей мере будут накапливаться в межзеренном пространстве и будут легче выноситься восходящими потоками флюида.

Предприняты попытки геологической интерпретации выявленных типичных законов распределения. В частности, возникновение цепи положительной обратной связи, необходимой для реализации степенного закона распределения числа месторождений в зависимости от объема запасов, может реализоваться при формировании месторождений потоками трансмагматических флюидов. Это предположение подкрепляется данными по структуре месторождений гигантского Норильского рудного узла [Родкин, 2010], а также наследованием степенного распределения размеров террейнов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполненных в работе исследований получены следующие результаты:

1. На основе географической информационной системы «Крупные и суперкрупные месторождения» (ГИС КСКМ) и других источников была составлена база данных параметров крупных рудных месторождений мира: координаты и название каждого месторождения, объем запасов и концентрация (для каждого полезного компонента). Полученная база данных дополнена более детальными данными по месторождениям меди.

2. Подтверждена возможность описания эмпирических распределений величин запасов – степенным, а значений концентрации – логнормальным законом распределения. Подтверждение степенного распределения величин запасов, аналогичного закону Гутенберга-Рихтера, является дополнительным указанием на существенно неравновесный характер процессов, ответственных за формирование месторождений.

3. В рабочей среде Matlab подготовлены алгоритмы, генерирующие модельные примеры распределения гипотетических месторождений с контролируемыми параметрами распределения. На полученных модельных примерах опробованы методы фрактального корреляционного анализа: показаны пределы применимости метода, введено новое понятие смешанной корреляционной размерности. Опробованные методы применены для анализа эмпирических данных ранее сформированных баз данных по крупным и суперкрупным рудным месторождениям мира (на основе ГИС КСКМ с добавлениями) и базы данных по месторождениям меди.

4. Предложены меры близости на основе расчета смешанных корреляционных размерностей и на основе меры близости Танимото-Роджерса. Матрицы мер близости были использованы для проведения формальной кластеризации разных видов месторождений.

5. Кластеризация компонент рудных месторождений на основании меры близости Танимото-Роджерса выявляет кластеры элементов аналогичные тем, которые были скомпонованы ранее экспертным образом. К новым результатам кластеризации можно отнести тенденцию частого выявления кластеров, составленных преимущественно из элементов с обогащением либо в верхней, либо в нижней континентальной коре.

6. Результаты кластеризации месторождений, полученные независимыми методами (на основе расчета смешанной корреляционной размерности и меры близости Танимото-Роджерса) и по независимым данным (по пространственному расположению и по наполнению рудных месторождений) оказались тесно коррелированными, что указывает на корректность обоих этих подходов, возможность проведения на их основе содержательной формальной классификации компонент месторождений и на возможность получения общей классификации, путем объединения обоих этих подходов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афанасьев, Ю.В. Залежь углеводородов как самоорганизующаяся система / Ю.В. Афанасьев, Л.В. Цивинская // Геология нефти и газа. – 1999. – № 5–6. – С. 28–33.
2. База данных крупных и суперкрупных месторождений мира. В: Крупные и суперкрупные месторождения рудных полезных ископаемых / А.В. Ткачев, Д.В. Рундквист, С.В. Черкасов и др. – М.: ИГЕМ РАН, 2006. – Т. 1. – С. 21–49.
3. Белоусов, Б.П. Периодически действующая реакция и её механизм / Б.П. Белоусов // Автоволновые процессы в системах с диффузией: сб. ст. – Горький: Изд-во ГГУ, 1951. – С. 76.
4. Божокин, С.В. Фракталы и мультифракталы / С.В. Божокин, Д.А. Паршин. – Ижевск: НИЦ, 2001. – 128 с.
5. Бурштейн, Л.М. Статистические оценки параметров распределения скоплений нефти по величине в слабоизученных седиментационных бассейнах / Л.М. Бурштейн // Геология и геофизика. – 2006. – Т. 47, № 9. – С. 1013–1023.
6. Григорян, С.С. О механизме генерации землетрясений и смысле эмпирических сейсмических соотношений / С.С. Григорян // Докл. АН СССР. – 1988. – Т. 299, № 6. – С. 1094–1101.
7. Дискретные свойства геофизической среды: сб. науч. тр. / отв. ред. М.А. Садовский. – М.: Наука, 1989. – 176 с.
8. Жамбю, М. Иерархический кластер – анализ и соответствия / М. Жамбю. – М.: Финансы и статистика, 1988. – 345 с.
9. Запивалов, Н.П. О фрактальной структуре нефтегазовых месторождений / Н.П. Запивалов, Г.И. Смирнов // ДАН. – 1995. – Т. 341, № 1. – С. 110–112.
10. Запивалов, Н.П. Фрактальная геодинамика нефтегазовых месторождений / Н.П. Запивалов, Г.И. Смирнов, В.И. Харитонов // Наука и технология углеводородов. – 2000. – № 2. – С. 44–48.
11. Захаров, В.С. Аккреционная тектоника и фрактальные характеристики террейнов / В.С. Захаров, В.Н. Вадковский // Вестник КРАУНЦ. Серия: Науки о Земле. – 2013. – Вып. 21, № 1. – С. 122–131.
12. Зотов, И.А. Трансмагматические флюиды в магматизме и рудообразовании / И.А. Зотов. – М.: Наука, 1989. – 256 с.

13. Иванов, Е.А. Фрактальные свойства протекания жидкости в пористой среде / Е.А. Иванов. – Обнинск: Препринт ФЭИ–2928, 2002. – 14 с.
14. Князева, Е.П. Законы эволюции и самоорганизации сложных систем / Е.П. Князева, С.П. Курдюмов. – М.: Наука, 1994. – 214 с.
15. Конторович, А.Э. Закономерности выявления различных по запасам месторождений нефти и газа в нефтегазоносных бассейнах / А.Э. Конторович, В.И. Демин, И.А. Страхов // Геология и геофизика. – 1985. – № 11. – С. 3–16.
16. Конторович, А.Э. Нефтегазоносный бассейн как самоорганизующаяся система. Геохимическое моделирование и материнские породы нефтегазоносных бассейнов / А.Э. Конторович, В.Р. Лившиц. – СПб.: ВНИГРИ, 1998. – С. 144–148.
17. Конторович, А.Э. Прогноз количества и распределения по запасам месторождений нефти и газа / А.Э. Конторович, В.И. Демин // Геология и геофизика. – 1979. – № 3. – С. 37–46.
18. Краснов, К.С. Физическая химия: учеб. для вузов. В 2 кн. / под ред. К.С. Краснова. – Кн. 2: Электрохимия. Химическая кинетика и катализ / К.С. Краснов, Н.К. Воробьев, И.Н. Годнев и др. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1995. – 319 с.
19. Краснов, К.С. Физическая химия: учеб. для вузов. В 2 кн. / под ред. К.С. Краснова. – Кн. 1: Строение вещества. Термодинамика: учеб. для вузов / К.С. Краснов, Н.К. Воробьев, И.Н. Годнев и др. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1995. – 512 с.
20. Красный, Л.И. Значение возобновляемости минеральных ресурсов в геологии полезных ископаемых / Л.И. Красный, М.Л. Красный // ДАН. – 2008. – Т. 418, № 3. – С. 356–360.
21. Кроновер, Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах // Р.М. Кроновер. – М.: Постмаркет, 2000. – 352 с.
22. Крупные и суперкрупные месторождения рудных полезных ископаемых. В 3 томах / отв. ред.: И. А. Чиждова; Российская акад. наук, Отд-ние наук о Земле. – М.: ИГЕМ РАН, 2006. – Т.1: Глобальные закономерности размещения / гл. ред. Д.В. Рундквист. – 390 с.; Т. 2: Стратегические виды рудного сырья / гл. ред.: Н. П. Лаверов, Ю. Г. Сафонов. – 670 с.; Т. 3, кн.1: Стратегические виды рудного сырья Востока России / гл. ред.: Н.П. Лаверов, Д.В. Рундквист. – 470 с.; Т. 3, кн. 2: Стратегические виды рудного сырья Востока России / гл. ред.: Н.П. Лаверов, Д.В. Рундквист. – 392 с.

23. Крылов, С.С. Фракталы в геофизике / С.С. Крылов, Н.Ю. Бобров. – СПб.: Изд-во Санкт–Петербургского ун-та, 2004. – 138 с.
24. Лоскутов, А.Ю. Введение в синергетику / А.Ю. Лоскутов, А.С. Михайлов. – М.: Наука, 1990. – 272 с.
25. Мандель, И.Д. Кластерный анализ / И.Д. Мандель. – М.: Финансы и статистика, 1988. – 176 с.
26. Мандельброт, Б. Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт; пер. с англ. А. Логунова. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
27. Модели генерации степенных распределений в рудо– и нефтегенезе: от порождающих механизмов к прогнозным признакам / М.В. Родкин, И.А. Зотов, Е.М. Граева, Л.М. Лабунцова, А.Р. Шатахян // Итоги Электронного Геофизического Года: мат-лы Международной конференции, 3–6 июня 2009 г., Переславль-Залесский. – М.: Геофизический центр РАН, 2009. – С. 104–105.
28. Нургалиева, Н.Г. Прогнозирование неантиклинальных ловушек углеводородов на основе корреляции фрактальной размерности кривых гамма-каротажа / Н.Г. Нургалиева, Э.В. Утёмов, В.Е. Косарев // Электронный научный журнал "Нефтегазовое дело". – 2007. – № 1. – URL: http://www.ogbus.ru/authors/Nurgalieva/Nurgalieva_1.pdf
29. Особенности гидродинамического моделирования залежей в трещиноватых карбонатных коллекторах Юрубчено-Тохомской зоны нефтегазонакопления / А.В. Петухов, И.Е. Долгий, А.В. Козлов, А.А. Петухов // Записки Горного института. – 2013. – Т. 200. – С. 242–248.
30. Перродон, А. История крупных открытий нефти и газа / А. Перродон. – М.: Мир, 1994. – 255 с.
31. Петьков, В.И. Химические реакторы. / В.И. Петьков, А.К. Корытцева. – Электронное учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. – 71 с.
32. Писаренко, В.Ф. Распределения с тяжелыми хвостами: приложения к анализу катастроф / В.Ф. Писаренко, М.В. Родкин. – М.: Геос, 2007. – 240 с. – (Вычислительная сейсмология; Вып. 38).
33. Пригожин, И. Самоорганизация в неравновесных системах: от диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации / И. Пригожин, Е. Николис. – М.: Мир, 1979. – 512 с.

34. Родкин, М.В. Исследование рудных месторождений методами анализа динамических систем. I. Расчет корреляционной размерности / М.В. Родкин, А.Р. Шатахцян // Физика Земли. – 2015. – № 3. – С. 102–111.
35. Родкин, М.В. Исследование рудных месторождений методами анализа динамических систем. II. Кластеризация рудных месторождений и ее интерпретация. / М.В. Родкин, А.Р. Шатахцян // Физика Земли. – 2015. – № 3. – С. 112–121.
36. Родкин, М.В. Кластеризация рудных месторождений по их составу и пространственному расположению / М.В. Родкин, А.Р. Шатахцян, И.Б. Гусев // Геодинамические процессы и природные катастрофы в Дальневосточном регионе: тез. докл. научной конференции, посвященной 65-летию Института морской геологии и геофизики ДВО РАН, Южно–Сахалинск, 26–30 сентября 2011 г. – Южно–Сахалинск: ИМГиГ ДВО РАН, 2011. – С. 9.
37. Родкин, М.В. Модели процессов рудо- и нефтегенеза, обеспечивающие реализацию эмпирических законов распределения величин запасов месторождений и концентраций / М.В. Родкин, Е.М. Граева, А.Р. Шатахцян // Тектоника и геодинамика складчатых поясов и платформ фанерозоя: мат-лы XLIII Тектонического совещания. – М.: ГЕОС, 2010. – Т. 2. – С. 210–213.
38. Родкин, М.В. Модель рудогенеза как следствия перераспределений вещества между различными резервуарами тектоносферы / М.В. Родкин, А.Р. Шатахцян // Новые горизонты в изучении процессов магмо- и рудообразования: мат-лы Всероссийской конференции, посвященной 80-летию Института геологии рудных месторождений, петрографии, минералогии и геохимии РАН (ИГЕМ РАН), г. Москва, 4–7 октября 2010 г. – М.: ИГЕМ РАН, 2010. – С. 143–144.
39. Родкин, М.В. Некоторые статистики рудных и УВ месторождений – выводы о характере их генезиса / М.В. Родкин, А.Р. Шатахцян // Геодинамика, геомеханика и геофизика: мат-лы 11-го Всероссийского семинара, п. Новый Энхалук, Республика Бурятия, 25–31 июля 2011 г. – б.м., 2011. – С. 36.
40. Родкин, М.В. О формальной кластеризации рудных месторождений на основе расчета мер близости и фрактальной размерности / М.В. Родкин, А.Р. Шатахцян // Геодинамика, рудные месторождения и глубинное строение литосферы: мат-лы Всероссийской научной конференции с международным участием (XV Чтения памяти А.Н. Заварицкого). – Екатеринбург: ИГГ УрО РАН, 2012. – С. 223–225.

41. Родкин, М.В. Опыт классификации рудных месторождений на основе использования иерархической ультраметрической метрики и меры Танимото / М.В. Родкин, А.Р. Шатахцян, Е.М. Граева // Свойства, структура, динамика и минерагения литосферы Восточно-Европейской платформы: мат-лы XVI Международной конференции, 20–24 сентября 2010 г. – Воронеж: Научная книга, 2010. – Т. II. – С. 182–186.
42. Родкин, М.В. Процессы рудо- и нефтегенеза как побочный продукт перераспределения вещества между различными резервуарами земной коры и мантии / М.В. Родкин, А.Р. Шатахцян, Е.М. Граева // Дегазация Земли и генезис нефтегазовых месторождений. – М.: ГЕОС, 2011. – С. 93–114.
43. Родкин, М.В. Распределения величин запасов рудных месторождений – аналог закона Гутенберга-Рихтера? Модели реализации распределения / М.В. Родкин, А.Р. Шатахцян // Тектоника, рудные месторождения и глубинное строение Земной коры: мат-лы Всероссийской научной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН С.Н. Иванова, 24–26 мая 2011 г., Екатеринбург. – Екатеринбург, 2011. – С. 236–238.
44. Родкин, М.В. Рудные месторождения – порождение круговорота вещества в тектоносфере / М.В. Родкин, А.Р. Шатахцян // Земля и Вселенная. – 2013. – № 4. – С. 3–13.
45. Родкин, М.В. Статистический анализ данных по крупным и суперкрупным месторождениям: эмпирические закономерности и интерпретация / М.В. Родкин, А.Р. Шатахцян // Геоинформатика. – 2013. – № 4. – С. 25–32.
46. Родкин, М.В. Степенное распределение запасов УВ в месторождениях: модели генерации и связь с процессами восполнения запасов в разрабатываемых месторождениях / М.В. Родкин // Генезис углеводородных флюидов и месторождений. – М.: ГЕОС, 2006. – С. 84–92.
47. Родкин, М.В. Фрактальная размерность размещения рудных месторождений на земной поверхности: связь с ультраметрической мерой Роджерса-Танимото / М.В. Родкин, А.Р. Шатахцян // Геологическая среда, минерагенические и сеймотектонические процессы: мат-лы 28-й Международной конференции, 24–29 сентября 2012 г., Воронеж. – Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2012. – С. 302–305.
48. Садовский, М.А. Автомодельность геодинамических процессов / М.А. Садовский // Вест. АН СССР. – 1986. – № 8. – С. 3–11.

49. Садовский, М.А. Деформирование геофизической среды и сейсмический процесс / М.А. Садовский, Л.Г. Болховитинов, В.Ф. Писаренко. – М.: Наука, 1987. – 101 с.
50. Садовский, М.А. Естественная кусковатость горной породы / М.А. Садовский // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 274, № 4. – С. 829 – 831.
51. Садовский, М.А. Сейсмический процесс в блоковой среде / М.А.Садовский, В.Ф. Писаренко. – М.: Наука, 1991. – 96 с.
52. Смолин, Д.В. Введение в искусственный интеллект / Д.В. Смолин. – М.: Физматлит. – 2007. – 262 с.
53. Соколов, Б.А. Новые идеи в геологии нефти и газа: избранные труды. – М.: МГУ, 2001. – 480 с.
54. Тейлор, С.Р. Континентальная кора, ее состав и эволюция / С.Р. Тейлор, С.М. Мак-Леннан. – М.: Мир, 1988. – 383 с.
55. Уиллиамс, У.Т. Методы иерархической классификации / У.Т. Уиллиамс, Д.Н. Ланс // Статистические методы для ЭВМ / ред. М.Б. Малютов. – М.: Наука, 1986. – С. 269–301.
56. Урусов, В.С. Геохимия твердого тела / В.С. Урусов, В.Л. Таусон, В.В. Акимов. – М.: ГЕОС, 1997. – 502 с.
57. Утёмов, Э.В. Некоторые аспекты использования анализа фрактальных свойств геофизических данных при их геологической интерпретации. – Казань, 1998. – 11с. – Деп. в ВИНТИ 18.09.98. – №2822–В98.
58. Федер, Е. Фракталы / Е. Федер. – М.: Мир, 1991. – 261 с.
59. Циллис, К. Об измерении фрактальных размерностей по физическим свойствам / К. Циллис // Фракталы в физике: сб. статей. – М.: Мир, 1988. – 25 с.
60. Шатахцян, А.Р. Применение методов расчета фрактальной размерности к данным по рудным месторождениям – новые подходы и результаты / А.Р. Шатахцян // Тектоника современных и древних океанов и их окраин: мат-лы XLIX Тектонического совещания. – М.: ГЕОС, 2017. – Т. 2. – С. 288-291.
61. Шатахцян, А.Р. Сравнение распределения крупных и суперкрупных рудных месторождений / А.Р. Шатахцян // Комплексное изучение и оценка месторождений твердых полезных ископаемых: тез. докл. Третьей научно-практической конференции молодых ученых и специалистов, посвященной 125-летию со дня рождения первого директора ВИМСа Н.М. Федоровского, Москва, 17–18 мая 2011 г. – М., 2011. – С. 117-119.

62. Aharonov, E. Growth of correlated pore-scale structures in sedimentary rocks: a dynamical model / E. Aharonov, D. Rothman // *Jour. Geophys. Res.* – 1996. – Vol. 104, N B2. – P. 2973–2987.
63. Bak, P. Earthquakes as a self-organized critical phenomenon / P. Bak, C. Tang // *Jour. Geophys. Res.* – 1989. – Vol. 94, N B11. – P. 15.635–15.637.
64. Bak, P. Self-organized criticality: An explanation of 1/f noise / P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld // *Phys. Rev. Lett.* – 1987. – Vol. 59. – P. 381–384.
65. Forsythe, G.E. *Computer Methods for Mathematical Computations* / G.E. Forsythe, M.A. Malcolm, C.B. Moler. – Prentice-Hall, 1977. – 259 p. – (Series: Prentice-Hall series in automatic computation).
66. *Fractals in petroleum geology and Earth processes* / eds.: C.C. Barton, P.R. La Pointe. – N.Y.; London: Plenum Press, 1995. – 265 p.
67. Gutenberg, B. Frequency of earthquakes in California / B. Gutenberg, C.F. Richter // *Bull. Seismol. Soc. Am.* – 1944. – Vol. 34. – P. 185–188.
68. Havlin, S. Topological properties of percolation clusters / S. Havlin, R. Nossal // *J. Phys. A: Math. Gen.* – 1984. – Vol. 17. – P. L427–L432.
69. Hentschel, H. The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors / H. Hentschel, I. Procaccia // *Physica.* – 1983. – D 8. – P. 435–444.
70. Jain, A.K. Data clustering: A review / A.K. Jain, M. Murty, P. Flynn // *ACM Computing Surveys.* – 1999. – Vol. 31, N 3. – P. 264–323.
71. Kruskal, J.B. On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem / J.B. Kruskal // *Proceedings of the American Mathematical Society.* – 1956. – N 7. – P. 48–50. Doi:10.1090/S0002-9939-1956-0078686-7/
72. Lance, G.N. A general theory of classificatory sorting strategies. 1. Hierarchical Systems / G.N. Lance, W.T. Willams // *Comp. Journal.* – 1967. – N 9. – P. 373–380.
73. *Largest mineral deposits of the World. NavigaSIG Large and Superlarge Deposits* / D. Rundqvist, D. Cassard, S. Cherkasov et al. – Moscow: Russian-French Metallogenic Laboratory, 2006. – CD-ROM.
74. Laznichka, P. Quantitative relationships among giant deposits of metals / P. Laznichka // *Economic Geology.* – 1999. – Vol. 84, N 1/2. – P. 41–63.
75. Lemin, A.J. Isometric embedding of ultrametric (non-Archimedean) spaces in Hilbert space and Lebesgue space / A.J. Lemin // *Proceedings 6th International Conference on p-Adic*

- Functional Analysis. Book Series: Lecture Notes in Pure and Appl. Math. – 2001. – Vol. 222. – P. 203–218.
76. Mandelbrot, B.B. *The Fractal Geometry of Nature* / B.B. Mandelbrot. – San Francisco: Freeman, 1982. – 460 p.
77. Mantegna, R.N. *An Introduction to Econophysics. Correlations and Complexity in Finance* / R.N. Mantegna, H.E. Stanley. – Cambridge: Cambridge University Press, 2000. – 148 p.
78. Molchan, G. *Hot-Cold Spots in Italian Macroseismic Data* / G. Molchan, T. Kronrod // *Geophys. J. International*. – 2009. – Vol. 179, N 3. – P. 1787–1799.
79. Park, S.K. *Random Number Generators: Good ones are hard to find* / S.K. Park, K.W. Miller // *Comm. ACM*. – 1988. – Vol. 32, N 10. – P. 1192–1201.
80. Pearson, R.G. *Hard and soft acids and bases* / R.G. Pearson // *J. Amer. Chem. Soc.* – 1963. – Vol. 85, N 22. – P. 3533–3539.
81. *Power distributions in ore and oil genesis – interpretation and generating mechanisms* / M.V. Rodkin, I.A. Zotov, E.M. Grayeva, L.M. Labuntsova, A.R. Shatakhtsyan // *Russian Journal of Earth Sciences*. – 2010. – Vol. 11, № 3. – DOI: 10.2205/2009ES000408.
82. Rodkin, M.V. *Main Statistical Features of Major Ore and Oil Deposits* / M.V. Rodkin, A.R. Shatakhtsyan // 36th Interdisciplinary Workshop “The earth expansion evidence: A Challenge for Geology, Geophysics and Astronomy”, Sicily, Italy, 4–9 October, 2011. – Erice, 2012. – P. 439–448.
83. Sornette, D. *Critical phenomena in natural sciences* / D. Sornette. – Berlin: Springer, 2000. – 434 p.
84. Trauth, M. *MATLAB Recipes for Earth Sciences Fourth Edition* / Martin Trauth. – Berlin: Springer, 2015. – 238 p. – DOI: 10.1007/978-3-662-46244-7.
85. Tutcotte, D.L. *Fractals and chaos in geology and geophysics* / D.L. Tutcotte. – New York: Cambridge University Press, 1997. – 398 p.
86. Voss, R.F. *Random Fractals: Characterization and Measurement, Scaling Phenomena in Disordered Systems* / R.F. Voss. – New York: Plenum Press, 1985. – 320 p.
87. West, D.B. *Introduction to Graph Theory* / D.B. West. – Fourth edition. – NJ: Prentice–Hall. – 1996. – 180 p.
88. Yu, B. *Analysis of flow in fractal porous media* / B. Yu // *Applied Mechanics Reviews*. – 2008. – Vol. 61. – P. 050801/1–19.